Matrizes e operações matriciais

	Seg.	Ter.	Qua.	Qui.	Sex.	Sab.	Dom.
Matemática	2	3	2	4	1	4	2
História	0	3	1	4	3	2	2
Línguas	4	1	3	1	0	0	2

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz: É um agrupamento retangular de números.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},$$

Entradas da matriz, também chamados de escalares

O Tamanho ou tipo da matriz é dado pelo número de linhas e colunas da matriz. Neste exemplo a matriz é do tipo 3x2 (3 linhas e duas colunas)

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Matriz coluna ou vetor-coluna

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz arbitrária mxn (m linhas e n colunas)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz linha ou vetor-linha

$\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ ou $\left[a_{ij}\right]$ Notação compacta

A entrada na linha i e na coluna j de uma matriz A também é comumente denotada por $(A)_{ij}$. Assim, para a matriz (1) acima, nós temos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A)_{11} = 2,\ (A)_{12} = -3,\ (A)_{21} = 7 \text{ e } (A)_{22} = 0.$$

é comum usarmos também a notação a_{ij}

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonal Principal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonal Secundária

Igualdade de Matrizes: Duas matrizes são ditas iguais se elas são do mesmo tipo e as entradas correspondentes são iguais.

Se $A = \left[a_{ij} \right]_{mxn}$ e $B = \left[b_{ij} \right]_{mxn}$ tem o mesmo tamanho, então A=B se, e somente se $(A)_{ij} = (B)_{ij}$ ou equivalentemente $a_{ij}=b_{ij}$ para quaisquer i e j.

Adição de Matrizes

Se A e B são matrizes de mesmo tamanho a matriz A+B é obtida somando-se as entradas de A correspondentes as entradas de B.

OBS.: MATRIZES DE TAMANHOS DIFERENTES NÃO PODEM SER SOMADAS.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad \textit{então} \quad A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1}+b_{m2} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplicação de uma matriz por um escalar

Dada a matriz $A = \left[a_{ij} \right]_{mxn}$ e o escalar c, então

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *são* matrizes de mesmo tamanho e $c_1, c_2, \ldots c_n$ são escalares então $c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_nA_n$ é chamada combinação linear de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ com coeficientes $c_1, c_2, \ldots c_n$.

Para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2A - B + \tfrac{1}{3}C &= 2A + (-1)B + \tfrac{1}{3}C \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

é a combinação linear de A, B e C com coeficientes escalares 2, -1 e $\frac{1}{3}$.

Multiplicação de matrizes

Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}_{3x3} \quad , B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{3x2} \quad \text{então}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.4 + 0.1 & 1.5 + 2.2 + 0.2 \\ 2.1 + 1.4 + (-1).1 & 2.5 + 1.2 + (-1).2 \\ 3.1 + 3.4 + (-2).1 & 3.5 + 3.2 + (-2).2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 5 & 10 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$$

$$A_{(m \times n)} \cdot B_{(n \times p)} = C_{(m \times p)}$$

garante a existência do produto

Produtos Matriciais como Combinações Lineares Matrizes-linha e coluna fornecem uma maneira alternativa de ver a multiplicação matricial. Por exemplo, suponha que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Então

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Nós mostramos no Exemplo 5 que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

As matrizes-coluna de $A\ B$ podem ser expressas como combinações lineares das matrizes-coluna de A como segue:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

◆

Forma Matricial de um Sistema Linear

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

AX=b

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada do sistema

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Transposta de uma matriz

Se A é uma matriz $m \times n$ qualquer, então a ***transposta de A***, denotada por A^T, é definida como a matriz $n \times m$ que resulta da permutação das linhas com as colunas de A; ou seja, a primeira coluna de A^T é a primeira linha de A, a segunda coluna de A^T é a segunda linha de A, e assim por diante.

$A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se **transposta de A** (indica-se por A^t) à matriz:

$$A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

Propriedades da Aritmética Matricial

(a) $A + B = B + A$ **(Lei da Comutatividade para a Adição)**

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ **(Lei da Associatividade da Adição)**

(c) $A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$ **(Lei da Associatividade da Multiplicação)**

(d) $A\,(B + C) = A\,B + A\,C$ **(Lei da Distributividade à Esquerda)**

(e) $(A + B)\,C = A\,C + B\,C$ **(Lei da Distributividade à Direita)**

(f) $A\,(B - C) = A\,B - A\,C$

(g) $(B - C)\,A = B\,A - C\,A$

(h) $a\,(B + C) = a\,B + a\,C$

(i) $a\,(B - C) = a\,B - a\,C$

(j) $(a + b)\,C = a\,C + b\,C$

(k) $(a - b)\,C = a\,C - b\,C$

(l) $a\,(b\,C) = (a\,b)\,C$

(m) $a\,(B\,C) = (a\,B)\,C = B\,(a\,C)$

Obs.: Note que não é válida a comutatividade para o produto de matrizes,ie, AB não necessariamente é igual a BA.

Matriz Nula

É a matriz que possui todas as suas entradas nulas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [0]$$

Propriedades da matriz nula

$(a)\ A + 0 = 0 + A = A$

$(b)\ A - A = 0$

$(c)\ 0 - A = -A$

$(d)\ A0 = 0;\ 0A = 0$

Matriz identidade

É a matriz quadrada que tem na diagonal principal valores 1 e nas demais entradas 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AI_n = A \quad \text{e} \quad I_n A = A$$

Se R é a forma escalonada reduzida por linhas de uma matriz A $n \times n$, então ou R tem uma linha de zeros ou R é a matriz identidade I_n.

Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada A, se pudermos encontrar uma matriz B de mesmo tamanho tal que $AB = BA = I$, então diremos que A é ***invertível*** e que B é uma ***inversa*** de A. Se não puder ser encontrada uma tal matriz B então diremos que A é ***não-invertível*** ou ***singular***.

Exemplo

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ é uma inversa de } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Exemplo de matriz que não é invertível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$BA \neq I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obs.: Nem todas as matrizes são invertíveis.

De fato, se $(A)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ então não existe uma matriz (B_{ij})

$tal\ \ que\ \ (A)_{ij}(\mathrm{B}_{ij}) = I.$

Uma matriz $n \times n$ que pode ser obtida da matriz identidade I_n de tamanho $n \times n$ executando uma única operação elementar sobre linhas é chamada uma ***matriz elementar***.

Matriz elementar

Uma matriz $n \times n$ que pode ser obtida da matriz identidade I_n de tamanho $n \times n$ executando uma única operação elementar sobre linhas é chamada uma ***matriz elementar***.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplique a segunda linha de I_2 por -3	Permute a segunda linha de I_4 com a quarta.	Some 3 vezes a terceira linha de I_3 à primeira.	Multiplique a primeira linha de I_3 por 1.

Teorema 1.5.2

Qualquer matriz elementar é invertível e a inversa é, também, uma matriz elementar.

Teorema 1.5.3 **Afirmações Equivalentes**

Se A é uma matriz $n \times n$ então as seguintes afirmações são equivalentes, ou seja, são todas verdadeiras ou todas falsas.

(a) A *é invertível.*
(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *tem somente a solução trivial.*
(c) *A forma escalonada reduzida por linhas de* A *é* I_n.
(d) A *pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.*