13. Uma locadora de automóveis tem à disposição de seus clientes uma frota de dezesseis carros nacionais e quatro carros importados, todos distintos. De quantas formas uma empresa poderá alugar três carros de modo que pelo menos um carro nacional seja escolhido?

Solução:

1º modo

Podemos ter um, dois ou três carros nacionais.

- Com um carro nacional e dois importados, o número de opções é $16 \cdot \binom{4}{2} = 16 \cdot 6 = 96$
- Com dois carros nacionais e um importado, o número de opções é $\binom{16}{2} \cdot 4 = 120 \cdot 4 = 480$
- Com os três carros nacionais, o número de opções é $\binom{16}{3} = 560$

Assim, ao todo, temos: $96 + 480 + 560 = 1\,136$ possibilidades.

2º modo

- O número de maneiras de a empresa alugar três carros *quaisquer* é $\binom{20}{3} = 1140$

- O número de possibilidades de a empresa só alugar carros importados é $\binom{4}{3} = 4$

Assim, a diferença $\binom{20}{3} - \binom{4}{3} = 1140 - 4 = 1136$ fornece o número de escolhas em que pelo menos um carro é nacional.

Permutações com elementos repetidos

Estudamos, até aqui, os agrupamentos simples, isto é, aqueles formados por elementos distintos. Vamos agora estudar as permutações com elementos repetidos, cujas técnicas de contagem estão baseadas em técnicas já estudadas na contagem dos agrupamentos simples.

obter o número de anagramas formados a partir de CASAL:

Cada anagrama formado é uma sequência de cinco letras, das quais duas são iguais a *A*.

O total de anagramas é $P_5^{(2)} = \dfrac{5!}{2!} = 60$.

Já em VENEZUELA, há nove letras, das quais três são iguais a *E*, e o número de anagramas possíveis é:

$$\overset{(3)}{P}_9 = \frac{9!}{3!} = 60\,480 \text{ anagramas}$$

Para obter o número de anagramas formados a partir de BANANA, seguimos o mesmo raciocínio: são seis letras, das quais três são *A* e duas são *N*. Temos:

$$\overset{(3,2)}{P}_6 = \frac{6!}{3!\,2!} = 60 \text{ anagramas}$$

Caso geral

Dados n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a a_2, n_3 são iguais a a_3, ..., n_r são iguais a a_r ($n_1 + n_2 + ... + n_r = n$), o número de permutações possíveis desses n elementos é dado por:

$$\boxed{P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_r!}}$$

Para contarmos o número de anagramas formados a partir de CACHORRO, temos:

Há oito letras, das quais duas são iguais a *C*, duas são iguais a *O*, duas são iguais a *R*, além de uma letra *A* e uma letra *H*. Temos, então:

$$P_8^{(2,2,2,1,1)} = P_8^{(2,2,2)} = \frac{8!}{2!\,2!\,2!} = 5\,040 \text{ anagramas}$$

Caso especial

Pode ocorrer que, em um conjunto com n elementos, n_1 sejam iguais a a_1 e n_2 sejam iguais a a_2, com $n_1 + n_2 = n$.

Nesse caso, o número de sequências que podem ser formadas com esses elementos é:

$$P_n^{(n_1,n_2)} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!} = \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} = \binom{n}{n_1} = C_{n,\,n_1}$$

Observe que também vale:

$$P_n^{(n_1,n_2)} = \frac{n!}{n_2!\,(n-n_2)!} = \binom{n}{n_2} = C_{n,\,n_2}$$