CÔNICAS $\rightarrow$ **Elipse, hipérbole, parábola (forma reduzida)**

Elipse

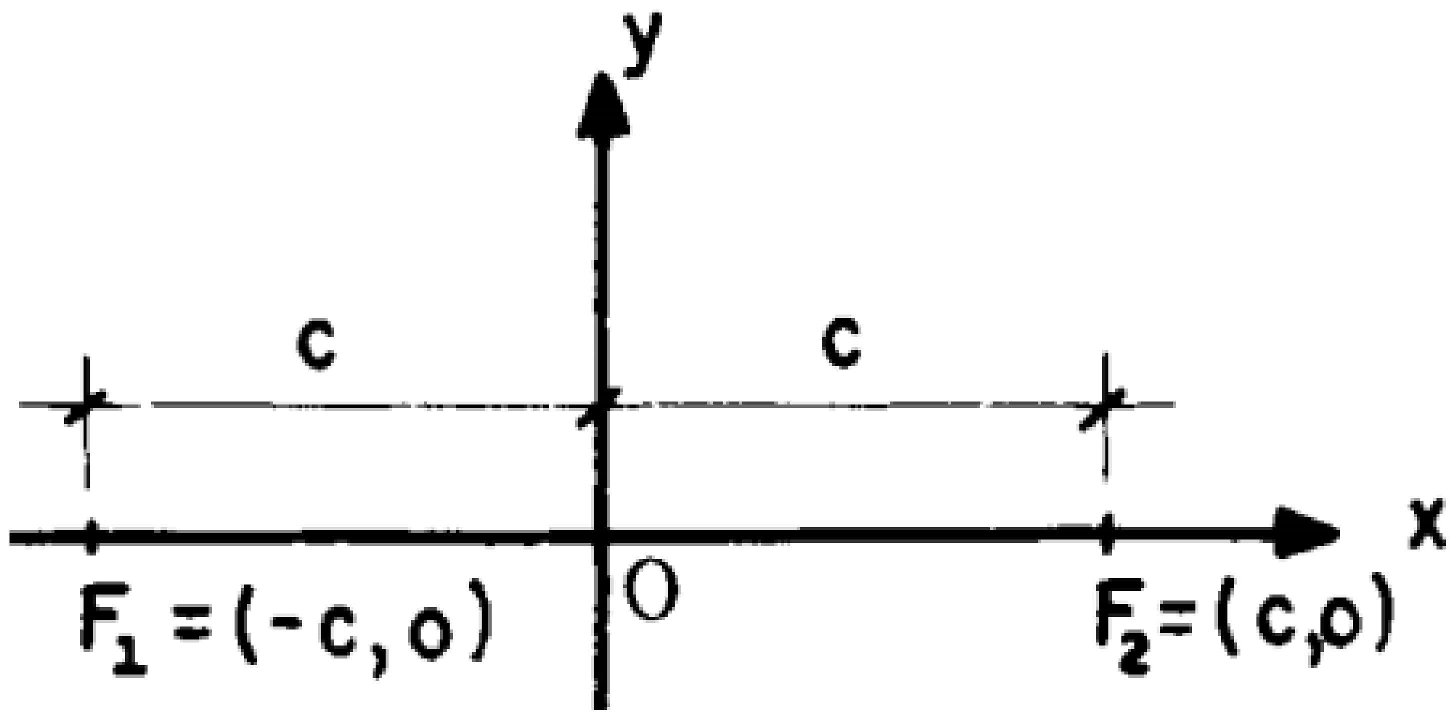
Definição

Consideremos num plano π dois pontos F_1 e F_2, distantes $2c > 0$ entre si. Seja $a > c$.

Ao conjunto dos pontos $P \in \pi$ tais que

$$\boxed{d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a}$$

se dá o nome de *elipse*.

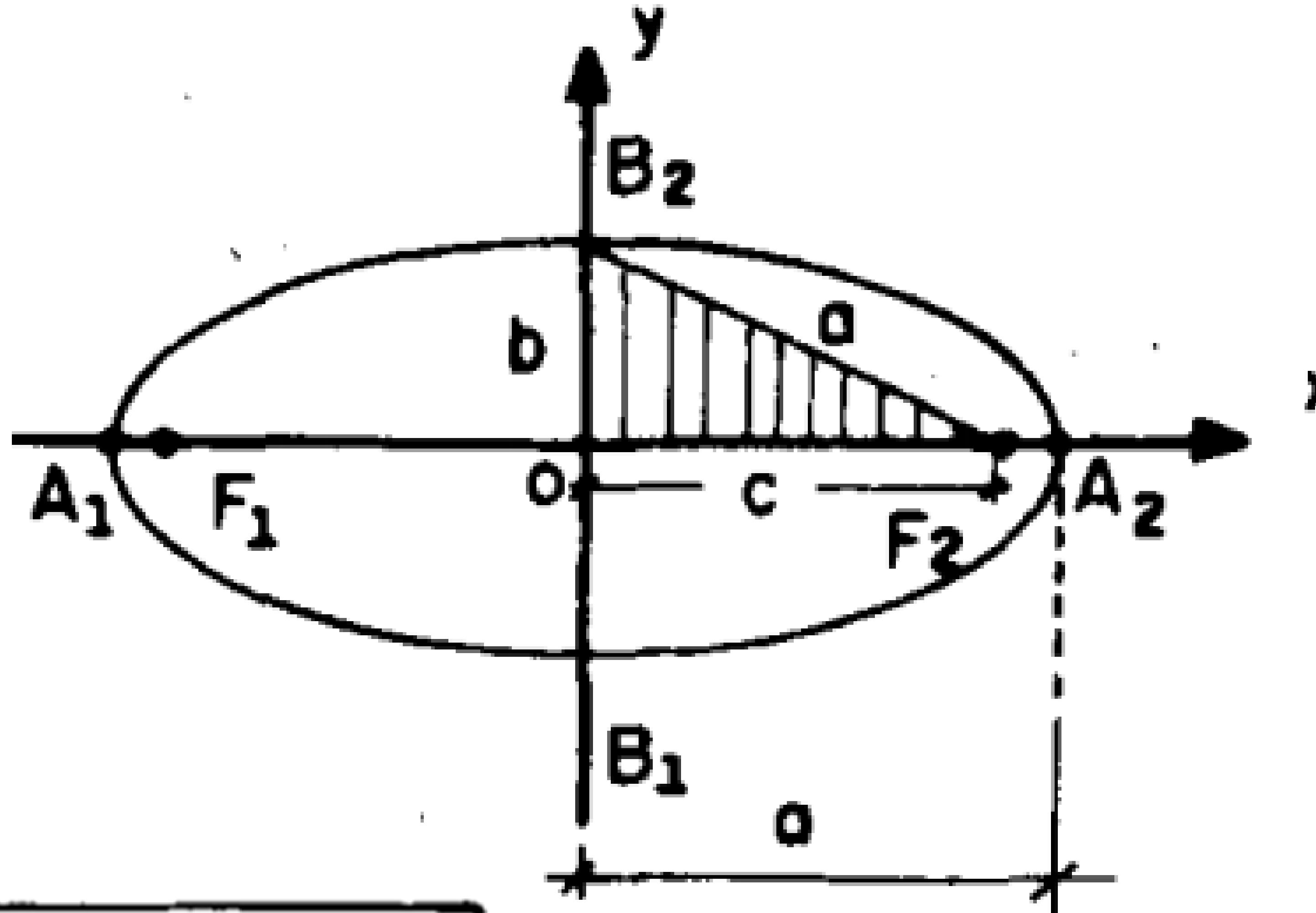


Equação na forma reduzida

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Esboço



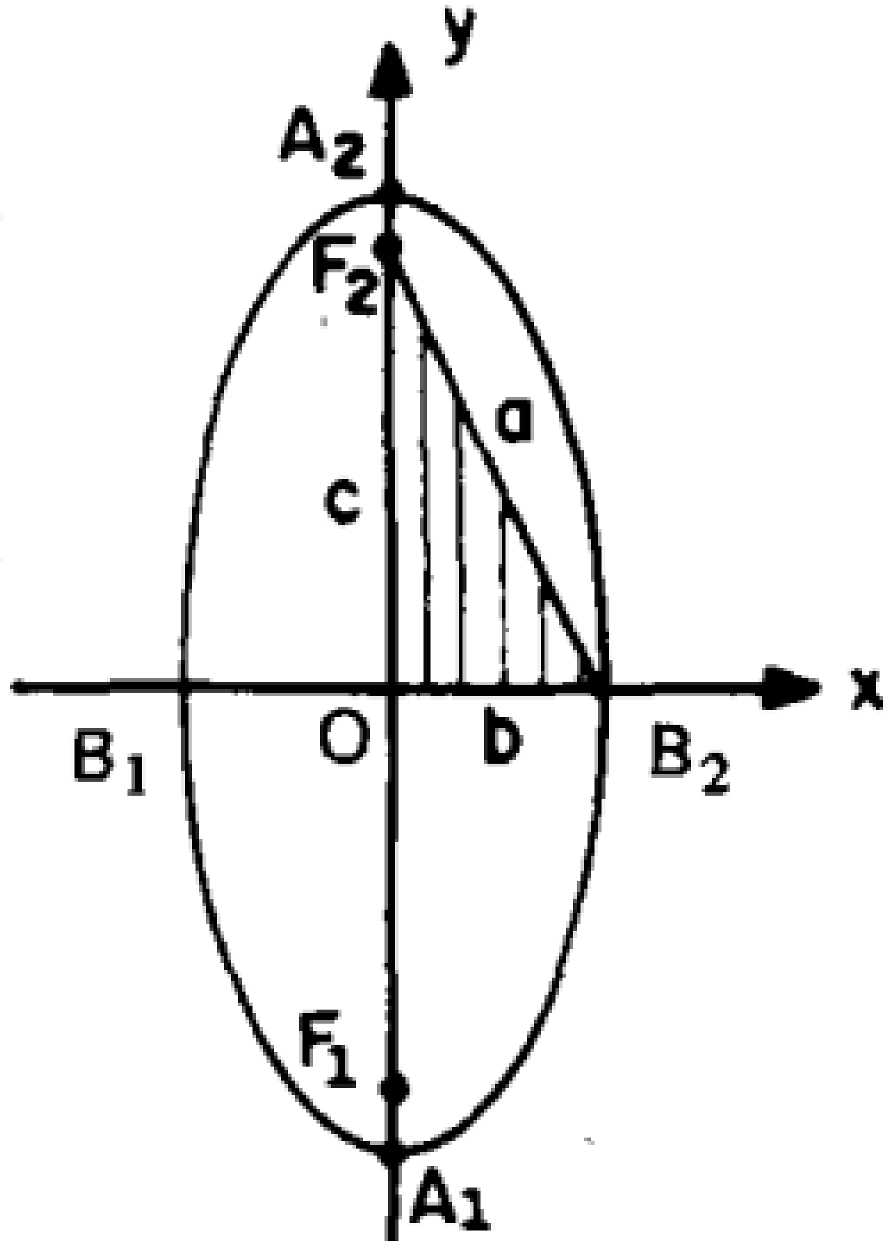
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Atenção

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Nomes

$\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$	:	focos
$\mathbf{2c}$	:	distância focal
$\mathbf{A_1 A_2}$	:	eixo maior
$\mathbf{B_1 B_2}$	:	eixo menor
$\mathbf{O}$	:	centro
$\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$	:	vértices
$\mathbf{F_1 F_2}$	:	segmento focal

Hipérbole

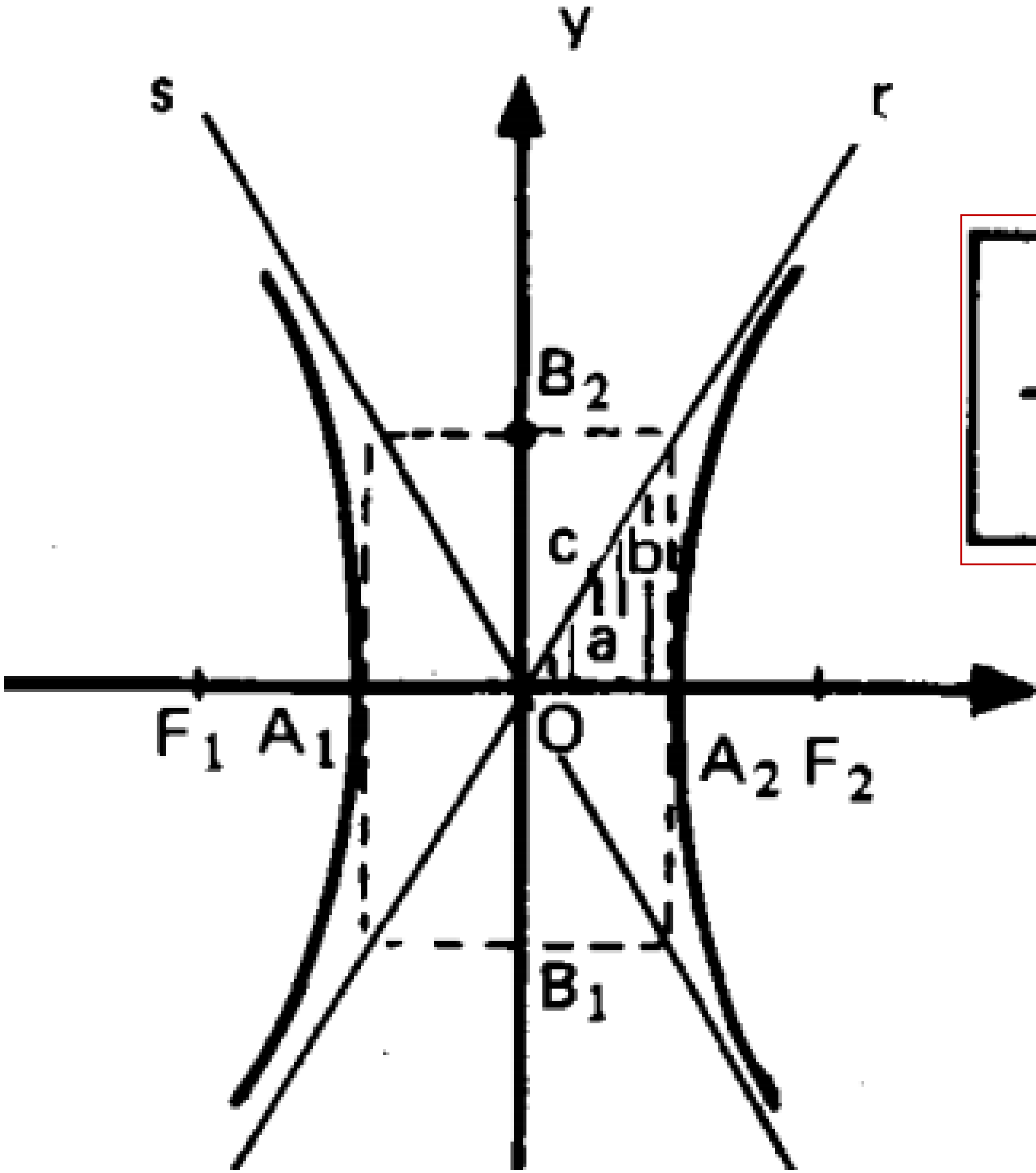
Definição

Consideremos num plano π dois pontos F_1 e $\mathbf{F}_2$, distantes $2c > 0$ entre si. **Seja** $0 < a < c$.

Ao conjunto dos pontos $P \in \pi$ tais que

$$|d(\mathbf{P}, \mathbf{F}_1) - d(\mathbf{P}, \mathbf{F}_2)| = 2a$$

se dá o nome de *hipérbole.*



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

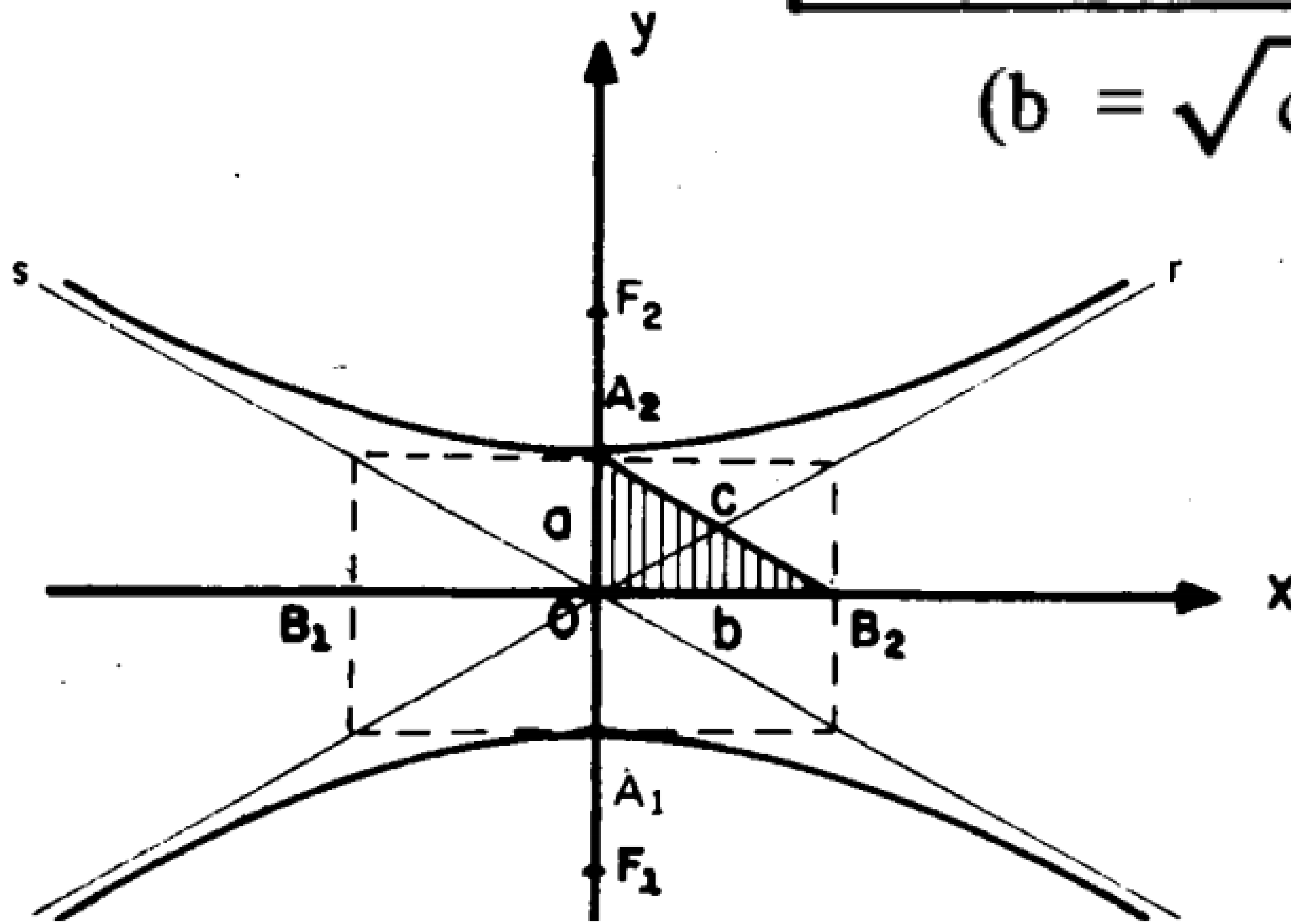
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$r: y = \frac{b}{a}x$ e $s: y = -\frac{b}{a}x$ são assíntotas à hipérbole

Atenção

$$\boxed{-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

$$(b = \sqrt{c^2 - a^2})$$



Nomes

F_1, F_2	:	focos
$2c$	:	distância focal
$A_1 A_2$	:	eixo transverso
$B_1 B_2$	:	eixo conjugado
O	:	centro
A_1, A_2	:	vértices
$F_1 F_2$	:	segmento focal
r e s	:	assíntotas

Parábola

Definição

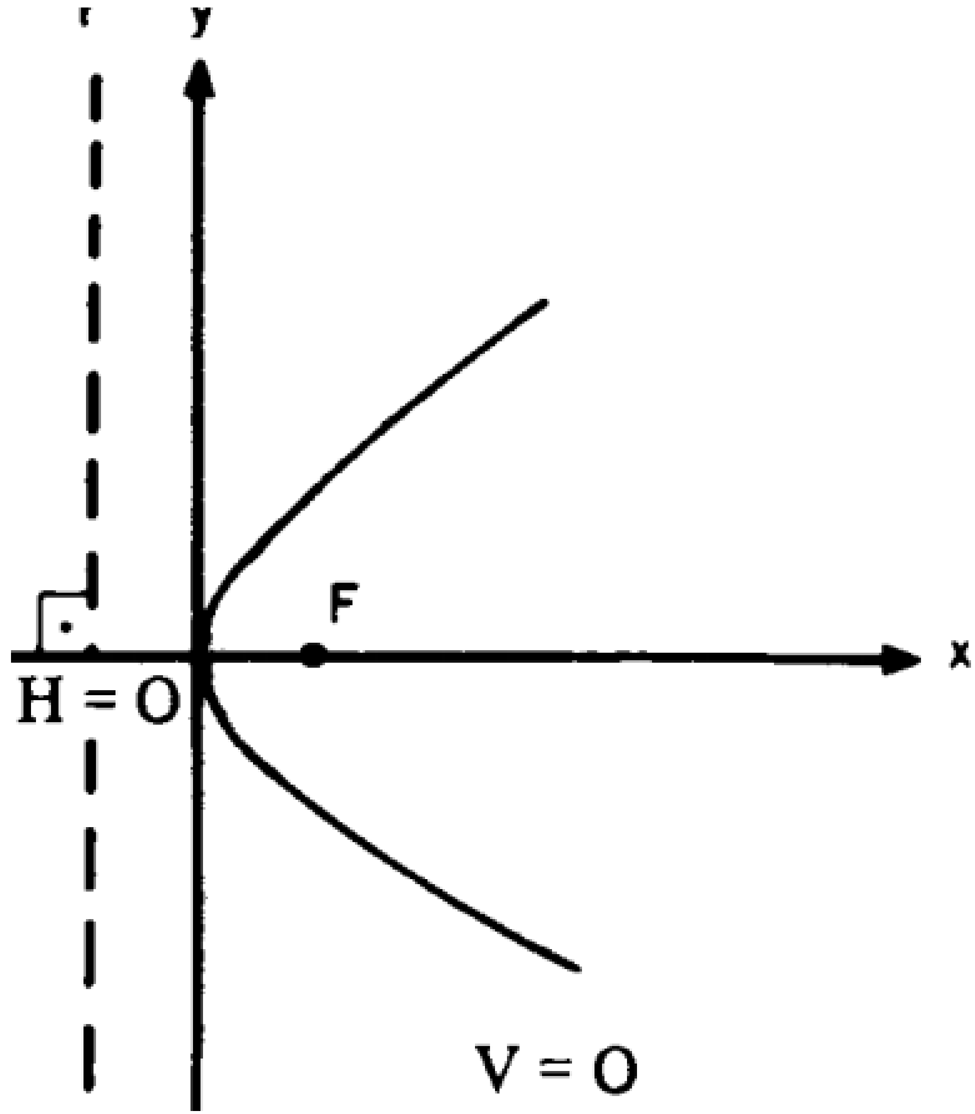
Consideremos num plano π um ponto F e uma reta r, $F \notin r$, fixos. Ao conjunto dos pontos de π equidistantes de F e r se dá o nome de *parábola*.

$P = (x, y)$ está na parábola se e somente se $d(P, F) = d(P, r)$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \frac{|x + p|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

Esboço



Nomes

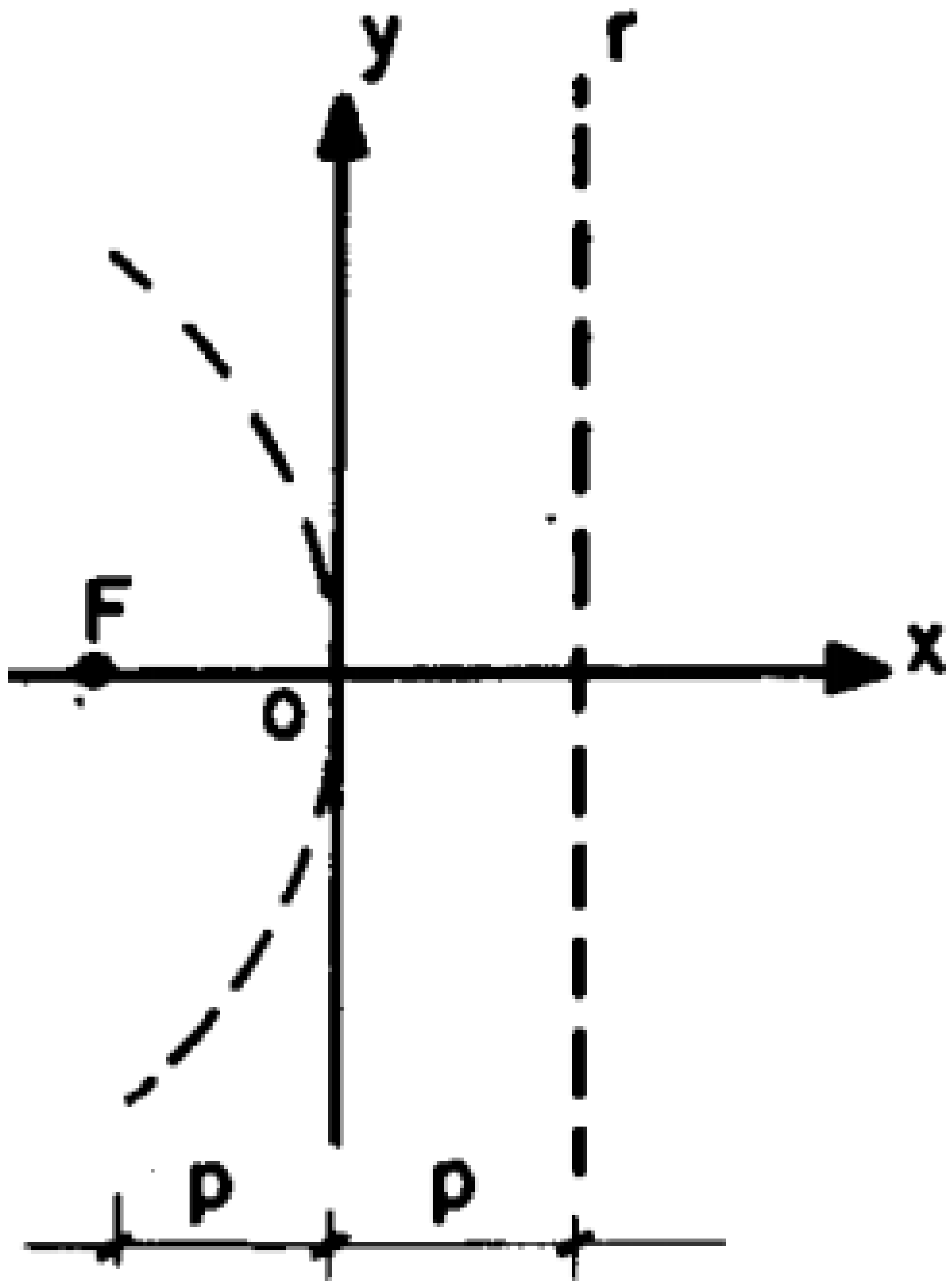
F : foco

r : diretriz

2p : parâmetro

reta por F e perpendicular a r : eixo (de simetria)

V (ponto médio de HF) : vértice

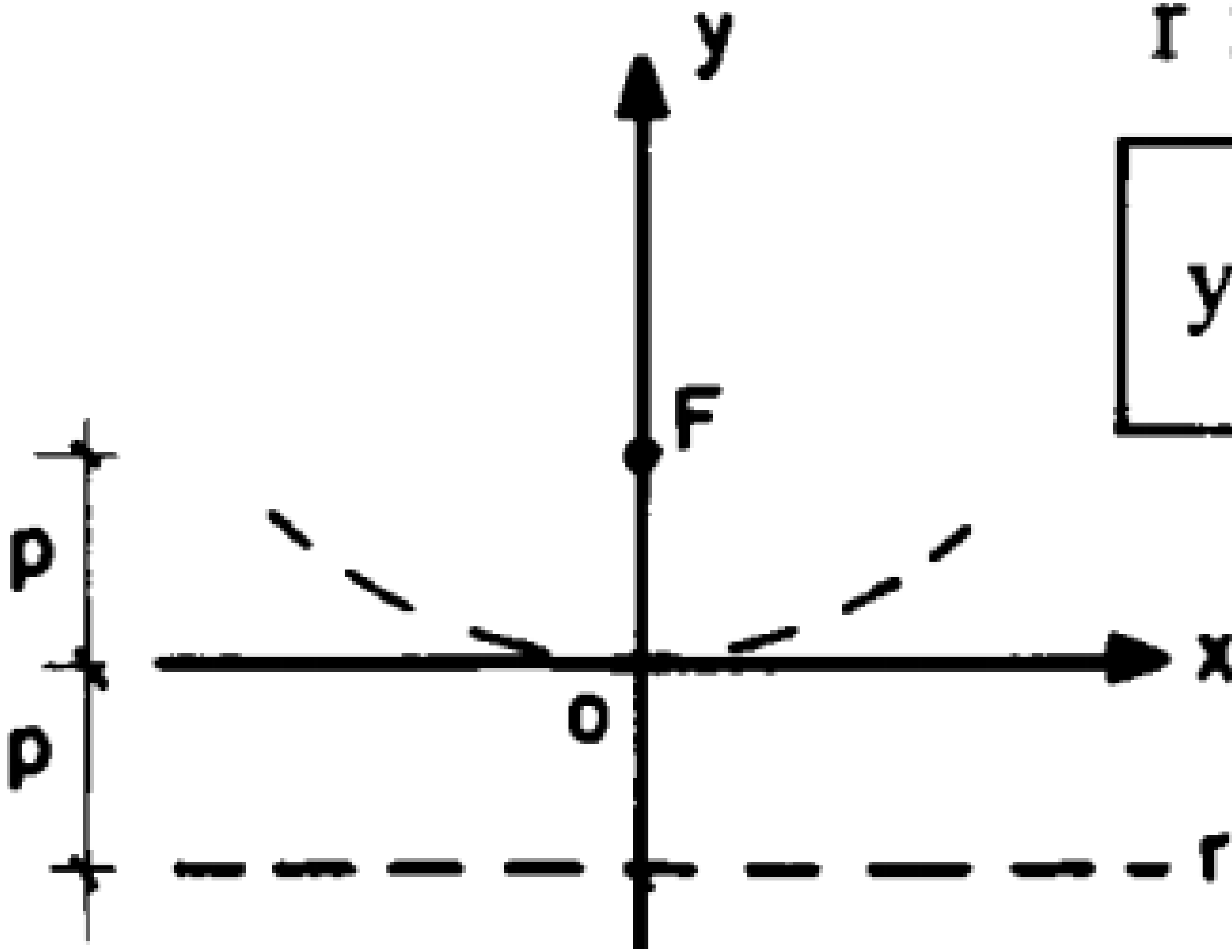


Atenção

$$F = (-p, 0)$$

$$r : x = p$$

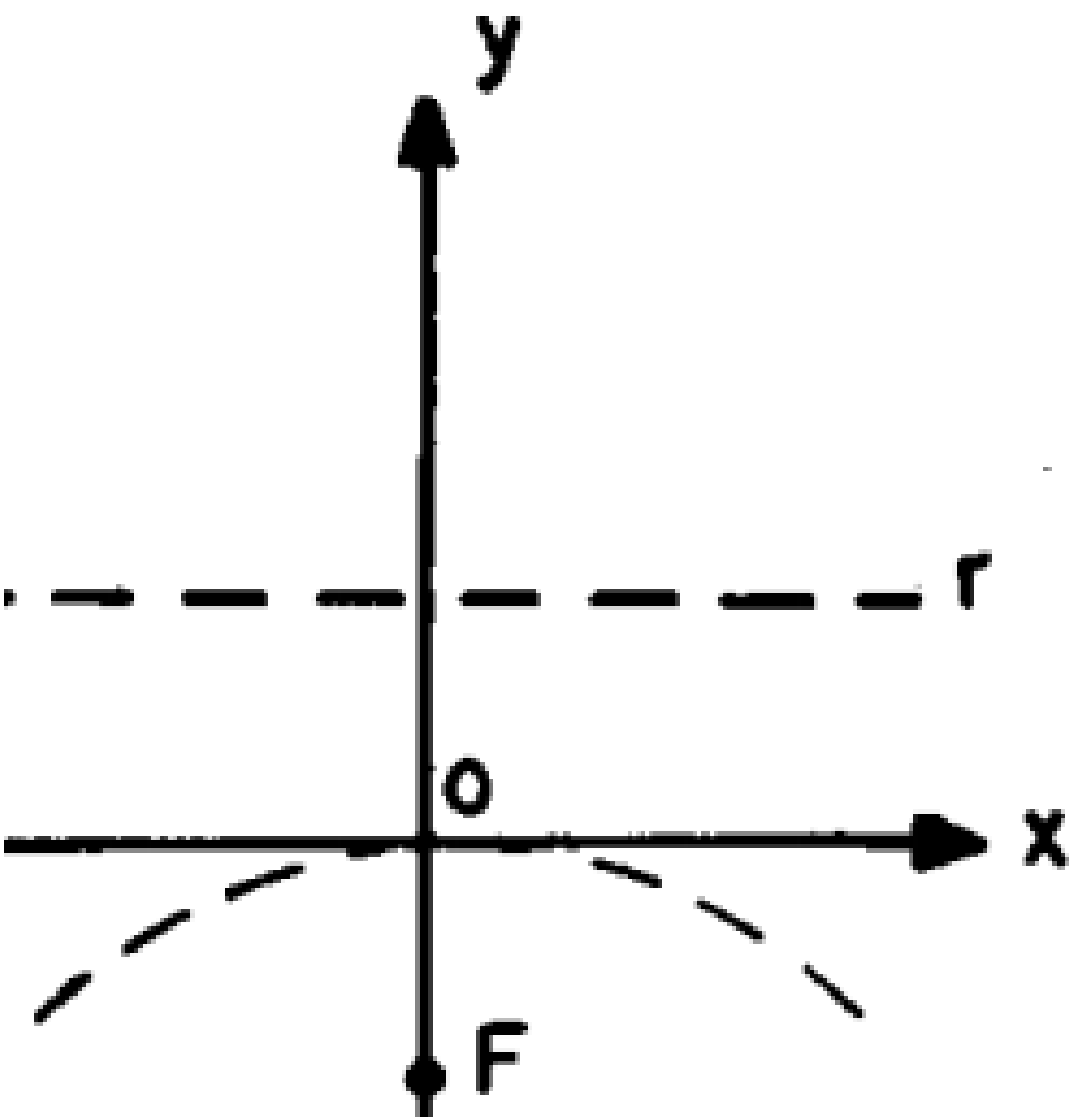
$$\boxed{y^2 = -4px}$$



$$F = (0, p)$$

$$r : y = -p$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4p} x^2}$$



$$F = (0, -p)$$

$$r : y = p$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{4p}x^2}$$

Cônicas (caso geral)

Definição

Dado num plano π um sistema ortogonal de coordenadas, e dada a equação

$$G(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\text{com } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

O conjunto de pontos P=(x,y) que satisfaz a referida equação é chamada de conica

Exemplos de cônicas

O conjunto vazio: $G(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$

Um ponto: $G(x, y) = x^2 + y^2 = 0$

Uma reta: $G(x, y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 0$

Reunião de duas retas paralelas:

$$G(x, y) = (x + y)(x + y + 1) = x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$$

Reunião de duas retas concorrentes:

$$G(x, y) = (x + y)(x - y) = x^2 - y^2 = 0$$

Elipse: $G(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$

Hipérbole: $G(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$

Parábola: $G(x, y) = x - y^2 = 0$

Circunferência: $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

estes nove casos esgotam as possibilidades.

Dificuldade para reconhecer a conica!!!

$35x^2 - 2xy + 35y^2 - 34x - 34y - 289 = 0$ (elipse)

$3x^2 + 12xy + 8y^2 - 18x - 28y + 11 = 0$ (hipérbole)

$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y + 15 = 0$ (vazio)

Se $B^2 - 4AC < 0$,

a cônica só pode ser: vazio, ponto, circunferência ou elipse

Se $B^2 - 4AC = 0$

a cônica só pode ser: reta, reunião de duas retas paralelas, parábola ou vazio.

$B^2 - 4AC > 0$

necessariamente de reunião de duas retas concorrentes, ou de hipérbole.