

Exercícios sobre Relações

- Indique quais pares ordenados pertencem a cada uma das relações binárias ρ em \mathbb{N} abaixo:
 - $x \rho y \leftrightarrow x + y < 7$; (1, 3), (2, 5), (3, 3), (4, 4)
 - $x \rho y \leftrightarrow x = y + 2$; (0, 2), (4, 2), (6, 3), (5, 3)
 - $x \rho y \leftrightarrow 2x + 3y = 10$; (5, 0), (2, 2), (3, 1), (1, 3)
 - $x \rho y \leftrightarrow y$ é um quadrado perfeito; (1, 1), (4, 2), (3, 9), (25, 5)
- Determine quais dos pares dados satisfazem a relação em questão.
 - ρ é a relação binária em \mathbb{Z} , $x \rho y \leftrightarrow x = -y$;
(1, -1), (2, 2), (-3, 3), (-4, -4)
 - ρ é a relação unária em \mathbb{N} , $x \in \rho \leftrightarrow x$ é primo;
19, 21, 33, 41
 - ρ é a relação ternária em \mathbb{N} , $(x, y, z) \in \rho \leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$;
(1, 1, 2), (3, 4, 5), (0, 5, 5), (8, 6, 10)
 - ρ é a relação binária em \mathbb{Q} , $x \rho y \leftrightarrow x \leq 1/y$;
(1, 2), (-3, -5), (-4, $\frac{1}{2}$), ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$)
- Seja $S = \{0, 1, 2, 4, 6\}$. Verifique se as relações binárias em S são reflexivas, simétricas, anti-simétricas e/ou transitivas:
 - $\rho = \{(0,0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (6,6), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 6)\}$
 - $\rho = \{(0, 1), (1, 0), (2, 4), (4, 2), (4, 6), (6, 4)\}$
 - $\rho = \{(0, 1), (1, 2), (0, 2), (2, 0), (2, 1), (1, 0), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$
 - $\rho = \{(0, 0), (1,1), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (4, 6), (6, 4)\}$
 - $\rho = \emptyset$
- Classifique as relações binárias a seguir nos conjuntos S dados como reflexivas, simétricas, anti-simétricas e transitivas:
 - $S =$ conjunto de todos os quadrados no plano
 $S_1 \rho S_2 \leftrightarrow$ tamanho do lado de $S_1 =$ tamanho do lado de S_2
 - $S =$ conjunto de todas as cadeias finitas de caracteres
 $x \rho y \leftrightarrow$ número de caracteres em $x =$ número de caracteres em y
 - $S =$ conjunto de todas as pessoas do Brasil
 $x \rho y \leftrightarrow x$ é irmão de y
 - $S = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})$
 $A \rho B \leftrightarrow |A| = |B|$
 - $S = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})$
 $A \rho B \leftrightarrow |A| \neq |B|$
 - $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
 $(x_1, y_1) \rho (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 \leq x_2$ e $y_1 \geq y_2$

11. Para cada caso abaixo, apresente um conjunto S e uma relação binária ρ em S (diferente das apresentadas nos exemplos e nos problemas) que satisfaça às condições pedidas.
- ρ é reflexiva e anti-simétrica, mas não é transitiva.
 - ρ é reflexiva e transitiva, mas não é simétrica.
 - ρ não é reflexiva nem simétrica, mas é transitiva.
 - ρ é reflexiva, mas não é simétrica nem transitiva.
12. Sejam ρ e σ relações binárias em um conjunto S .
- Se ρ e σ forem reflexivas, a união $\rho \cup \sigma$ será reflexiva? E a interseção $\rho \cap \sigma$?
 - Se ρ e σ forem simétricas, a união $\rho \cup \sigma$ será simétrica? E a interseção $\rho \cap \sigma$?
 - Se ρ e σ forem anti-simétricas, a união $\rho \cup \sigma$ será anti-simétrica? E a interseção $\rho \cap \sigma$?
 - Se ρ e σ forem transitivas, a união $\rho \cup \sigma$ será transitiva? E a interseção $\rho \cap \sigma$?
28. a. Qual o conjunto $[a]$ para a relação de equivalência $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$? Ele tem outras representações?
- b. Qual o conjunto $[3]$ para a relação de equivalência $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1,3), (3, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (4, 5), (5, 4)\}$? Qual o conjunto $[4]$?
30. Seja S o conjunto de todos os livros em uma biblioteca. Seja ρ uma relação binária em S definida por $x \rho y \leftrightarrow$ "a cor da capa de x é a mesma da cor da capa de y ". Mostre que ρ é uma relação de equivalência e descreva as classes de equivalências resultantes.