CONJUNTOS E ELEMENTOS

Um *conjunto* pode ser considerado como uma coleção de objetos, os *elementos* ou *membros* do conjunto. Normalmente usamos letras maiúsculas, A, B, X, Y, …, para denotar conjuntos, e letras minúsculas, a, b, x, y, …, para denotar elementos de conjuntos. A afirmação "p é um elemento de A" ou, equivalentemente, "p pertence a A", é escrita

$$p \in A$$

A afirmação de que p não é um elemento de A, isto é, a negação de $p \in A$, é escrita

$$p \notin A$$

O fato de que um conjunto fica completamente determinado quando seus elementos são especificados é formalmente conhecido como princípio da extensão.

Princípio da extensão: Dois conjuntos, A e B, são iguais se e somente se possuem os mesmos elementos.

Como de hábito, escrevemos $A = B$ se os conjuntos A e B são iguais, e escrevemos $A \neq B$ se os conjuntos não são iguais.

Descrição de Conjuntos

Existem essencialmente duas maneiras de especificar um conjunto particular. Uma opção, quando possível, consiste em listar seus elementos. Por exemplo,

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

A segunda maneira consiste em enunciar as propriedades que caracterizam os elementos do conjunto.

$$B = \{x: x \text{ é um inteiro par}, x > 0\},$$

Exemplo 1.1

(a) O conjunto A definido anteriormente também pode ser escrito como:

$$A = \{x: x \text{ é uma letra do alfabeto}, x \text{ é uma vogal}\}$$

Observe que b $\notin A$, e $\in A$ e p $\notin A$.

(b) Não seria possível listar todos elementos do conjunto B acima, embora freqüentemente se possa especificar o conjunto escrevendo

$$B = \{2, 4, 6, \ldots\},$$

onde se assume que o significado da especificação pode ser entendido por todos. Observe que $8 \in B$, mas $-7 \notin B$.

(c) Seja $E = \{ x : x^2 - 3x + 2 = 0 \}$. Em outras palavras, E é o conjunto das soluções da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$, por vezes denominado o *conjunto solução* da equação. Como as soluções da equação são 1 e 2, poderíamos também escrever $E = \{1, 2\}$.

N = o conjunto de inteiros positivos: 1, 2, 3, …,
Z = o conjunto dos inteiros: …, –2, –1, 0, 1, 2 …,
Q = o conjunto dos números racionais,
R = o conjunto dos números reais,
C = o conjunto dos números complexos.

O fato de que um conjunto pode ser descrito em função de uma propriedade é formalmente conhecido como *princípio da abstração*.

Princípio da abstração: Dado um conjunto U e uma propriedade P, existe um conjunto A tal que os elementos de A são os elementos de U que possuem a propriedade P.

CONJUNTO UNIVERSO E CONJUNTO VAZIO

Em qualquer aplicação da teoria dos conjuntos, os elementos de todos conjuntos considerados pertencem a algum conjunto maior, conhecido como *conjunto universo*. Por exemplo, em geometria plana, o conjunto universo compõe-se de todos os pontos do plano e, em estudos de populações humanas, o conjunto universo compõe-se de todas as pessoas do mundo. Vamos usar o símbolo

$$U$$

para denotar o conjunto universo, a menos que se mencione explicitamente, ou esteja implícito no contexto, um significado diferente para o símbolo.

Para um dado conjunto U e uma propriedade P, é possível que não existam elementos em U satisfazendo a propriedade P. Por exemplo, o conjunto

$$S = \{x : x \text{ é um inteiro positivo}, x^2 = 3\}$$

O conjunto que não contém elementos é chamado de *conjunto vazio*[†] e é denotado por:

$$\varnothing$$

Existe apenas um conjunto vazio. Isto é: se S e T são vazios, então $S = T$, já que possuem exatamente os mesmos elementos, isto é, nenhum.

SUBCONJUNTOS

Se todo elemento de um conjunto A é também um elemento de um conjunto B, diz-se que A é um *subconjunto* de B. Também dizemos que A está *contido* em B ou que B *contém* A. Essa relação é escrita como segue:

$$A \subseteq B \text{ ou } B \supseteq A$$

Se A não é um subconjunto de B, isto é, se pelo menos um elemento de A não pertence a B, escrevemos $A \nsubseteq B$ ou $B \nsupseteq A$.

Exemplo 1.2

(a) Considere os conjuntos

$$A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\} \qquad B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \qquad C = \{1, 5\}$$

Então, $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$, já que 1 e 5, os elementos de C, são também elementos de A e B. Mas $B \nsubseteq A$, uma vez que seus elementos, por exemplo, 2 e 7, não pertencem a A. Além disso, como os elementos de A, B e C também devem pertencer ao conjunto universo U, concluímos que U deve, pelo menos, conter o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

(b) Sejam **N**, **Z**, **Q** e **R** definidos como na Seção 1.2. Então:

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$$

As seguintes propriedades de conjuntos devem ser observadas:

(i) Todo conjunto A é um subconjunto do conjunto universo, já que, por definição, todos elementos de A pertencem U. O conjunto vazio, $\varnothing$, também é um subconjunto de A.

(ii) Todo conjunto A é um subconjunto de si mesmo, uma vez que, trivialmente, os elementos de A pertencem a A.

(iii) Se todo elemento de A pertence a um conjunto B, e todo elemento de B pertence a um conjunto C, então claramente todo elemento de A pertence a C. Em outras palavras, se $A \subsetneq B$ e $B \subsetneq C$, então $A \subsetneq C$.

(iv) Se $A \subsetneq B$ e $B \subsetneq A$, então A e B têm os mesmos elementos, i. e., $A = B$. Por outro lado, se $A = B$, então $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, já que todo elemento é um subconjunto de si mesmo.

Teorema 1-1: (i) Para todo conjunto A, temos $\varnothing \subseteq A \subseteq U$.

(ii) Para todo conjunto A, $A \subsetneq A$.

(iii) Se $A \subsetneq B$ e $B \subsetneq C$, então $A \subsetneq C$.

(iv) $A = B$ se e somente se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

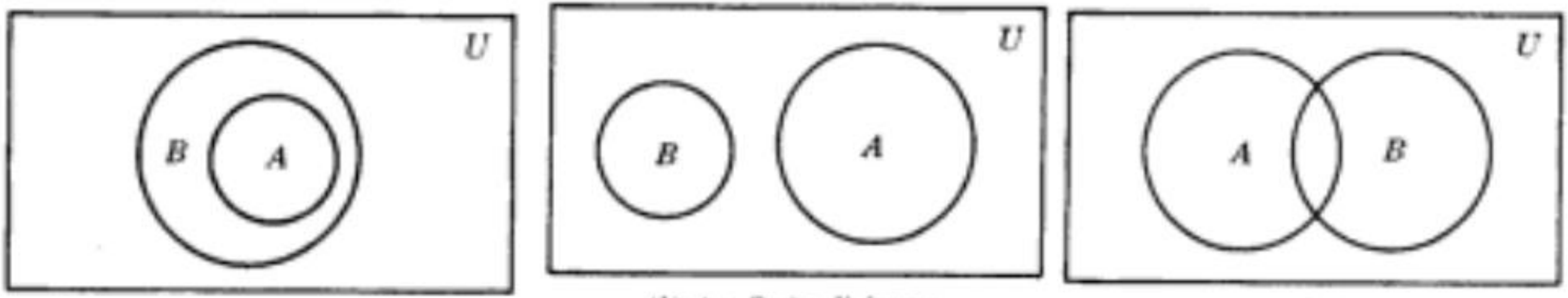
Se $A \subseteq B$, é possível que $A = B$. Quando $A \subsetneq B$ mas $A \neq B$, dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B. Escreveremos $A \subset B$ quando A é um subconjunto próprio de B. Por exemplo, suponha

$$A = \{1, 3\} \qquad B = \{1, 2, 3\}, \qquad C = \{1, 3, 2\}.$$

Então, A e B são subconjuntos de C; mas A é um subconjunto próprio de C, enquanto B não é um subconjunto próprio de C, já que $B = C$.

DIAGRAMAS DE VENN

Um diagrama de Venn é uma representação pictórica na qual os conjuntos são representados por áreas delimitadas por curvas no plano.



(a) $A \subseteq B$ (b) A e B são disjuntos (c)

Fig. 1-1

OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

Esta seção apresenta várias operações importantes entre conjuntos.

União e Interseção

A *união* de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos elementos que pertencem a A ou a B; isto é:

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

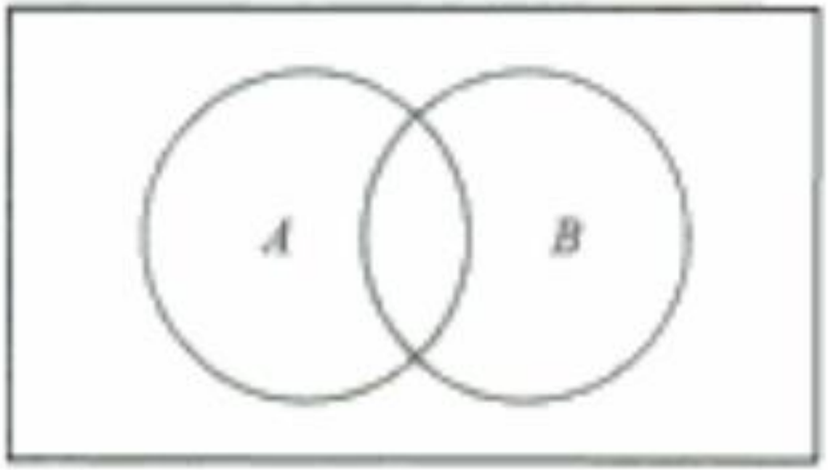
Aqui "ou" é usado no sentido de e/ou. A Figura 1-4(a) é um diagrama de Venn no qual $A \cup B$ está sombreado.

A *interseção* de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e a B; isto é,

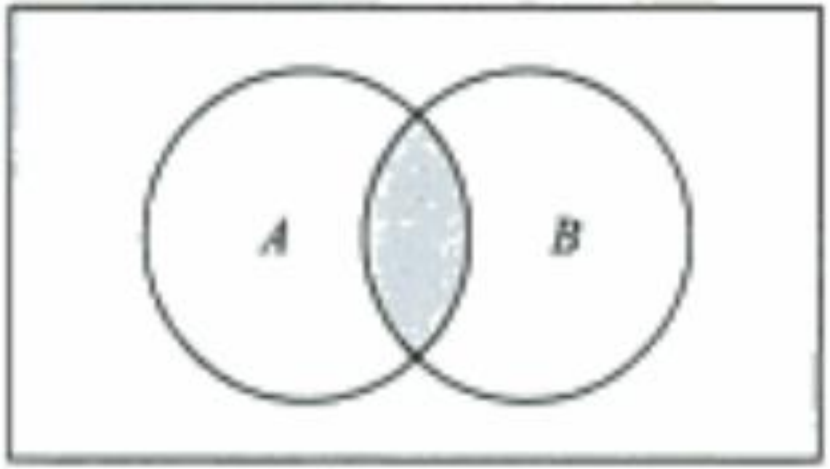
$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ e } x \in B\}$$

A Figura 1-4(b) é um diagrama de Venn no qual $A \cap B$ está sombreado.

Se $A \cap B = \varnothing$, isto é, se A e B não possuem elementos em comum, então A e B são ditos *disjuntos*.



(a) $A \cup B$ está sombreado



(b) $A \cap B$ está sombreado

Fig. 1-4

Exemplo 1.4

(*a*) Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$. Então,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad A \cap B = \{3, 4\}$$
$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \qquad A \cap C = \{2, 3\}$$

(*b*) Suponha que M denota o conjunto de estudantes do sexo masculino de uma universidade C, e F denota o conjunto de estudantes do sexo feminino na universidade C. Então,

$$M \cup F = C$$

já que cada estudante de C pertence a apenas um dos conjuntos, M ou F. Por outro lado,

$$M \cap F = \varnothing$$

já que nenhum estudante pertence a ambos os conjuntos M e F.

Teorema 1-2: são equivalentes $A \subseteq B$, $A \cap B = A$ e $A \cup B = B$.

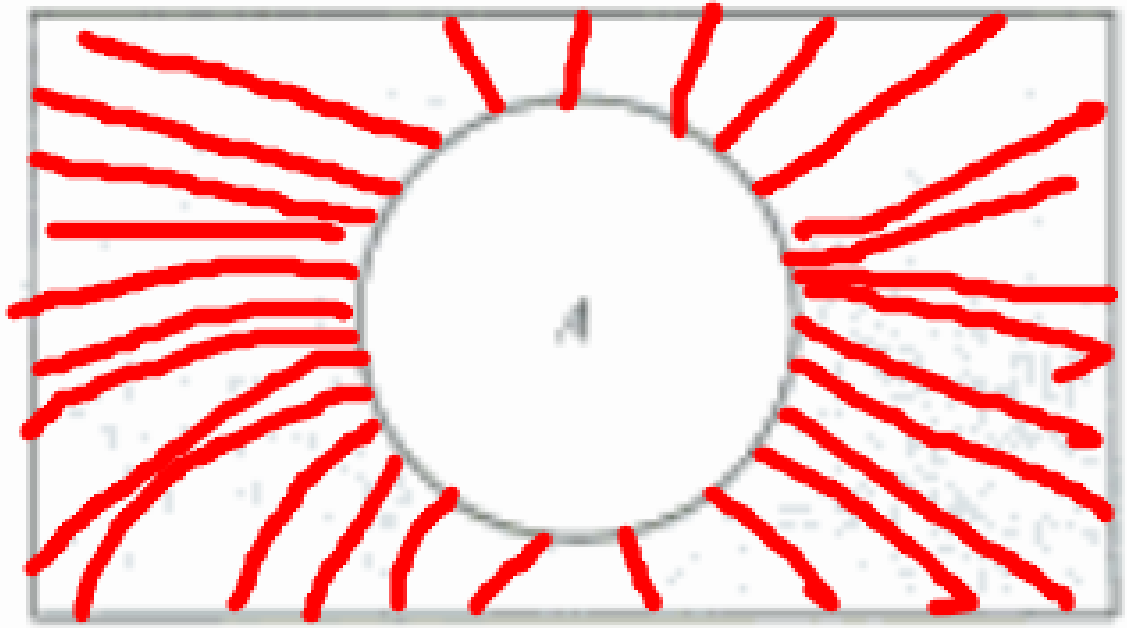
Complementares

Lembramos que todos conjuntos considerados em cada situação são subconjuntos de um conjunto universo fixo, U. O *complementar absoluto*, ou simplesmente *complementar de um conjunto* A, denotado por A^c, é o conjunto dos elementos que pertencem a U mas não pertencem a A; isto é,

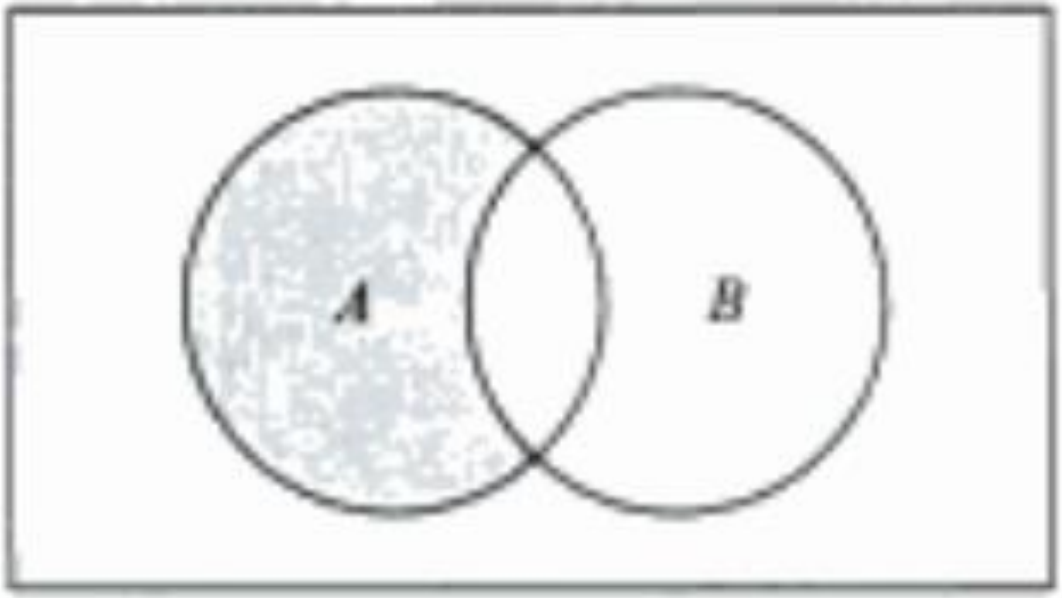
$$A^c = \{x \colon x \in U, x \notin A\}$$

O *complementar relativo* de um conjunto B em relação a A, ou simplesmente a diferença entre A e B, denotado por $A \backslash B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B, isto é,

$$A \backslash B = \{x \colon x \in A, x \notin B\}$$



(a) A^c está sombreado



(b) $A \backslash B$ está sombreado

Exemplo 1.5 Suponha que $U = \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto de inteiros positivos, seja o conjunto universo. Sejam

$$A = \{1, 2, 3, 4, \}, \qquad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}, \qquad C = \{6, 7, 8, 9\},$$

e seja $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, os inteiros pares. Então,

$$A^c = \{5, 6, 7, 8, \ldots\}, \qquad B^c = \{1, 2, 8, 9, 10, \ldots\}, \qquad C^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, \ldots\}$$

e

$$A \setminus B = \{1, 2\}, \qquad B \setminus C = \{3, 4, 5\}, \qquad B \setminus A = \{5, 6, 7\}, \qquad C \setminus E = \{7, 9\}.$$

Além disso, $E^C = \{1, 3, 5, \ldots\}$, o conjunto dos inteiros ímpares.

Produtos Fundamentais

Considere n conjuntos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Um produto fundamental de conjuntos é um conjunto da forma

$$A_1^* \cap A_2^* \cap \cdots \cap A_n^*,$$

onde A_i^* pode representar A_i ou A_i^c. Observamos que (1) existem 2^n produtos fundamentais, (2) quaisquer dois produtos fundamentais são disjuntos, e (3) o conjunto universo U é a união de todos os produtos fundamentais (Problema 1.64). Há uma descrição geométrica desses conjuntos que está ilustrada na próxima página.

Exemplo 1.6 Considere três conjuntos, A, B C. Estão listados a seguir os oito produtos fundamentais dos três conjuntos.

$$P_1 = A \cap B \cap C, \qquad P_3 = A \cap B^c \cap C, \qquad P_5 = A^c \cap B \cap C, \qquad P_7 = A^c \cap B^c \cap C$$
$$P_2 = A \cap B \cap C^c \qquad P_4 = A \cap B^c \cap C^c, \qquad P_6 = A^c \cap B \cap C^c \qquad P_8 = A^c \cap B^c \cap C^c$$

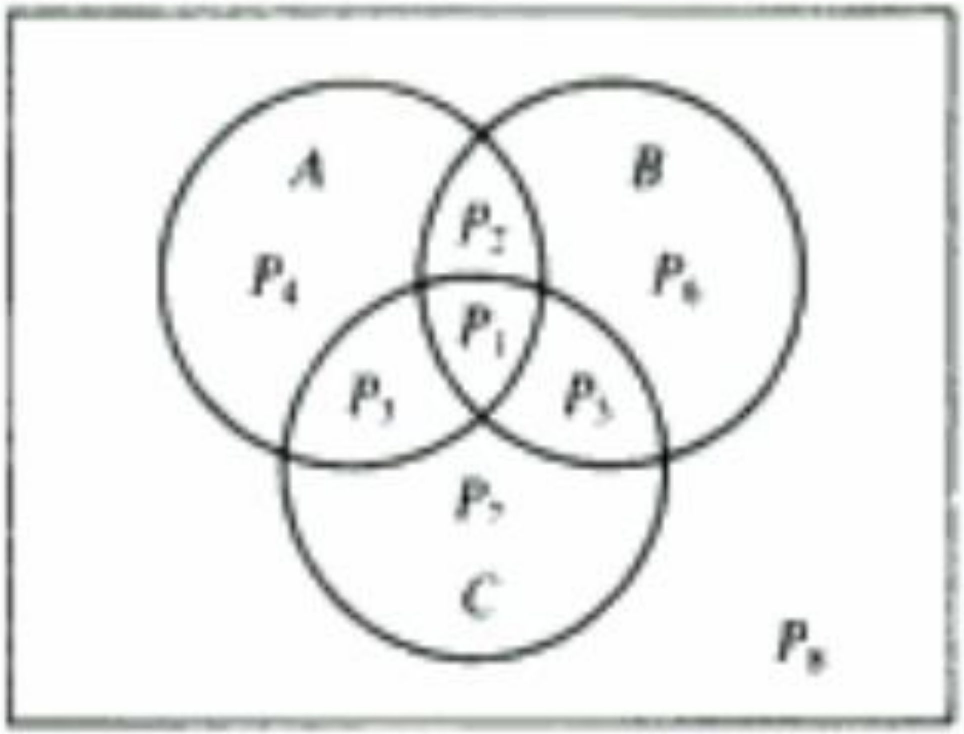
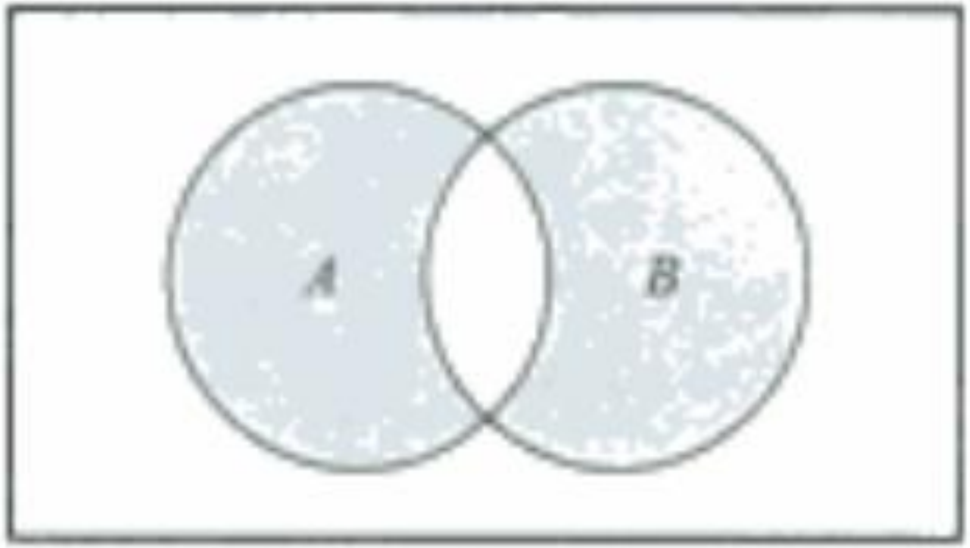


Fig. 1-6

Diferença Simétrica

A *diferença simétrica* dos conjuntos A e B, denotada por $A \oplus B$, consiste em todos os elementos que pertencem a A ou a B mas não a ambos; isto é,

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



A ⊕ B está sombreado

Fig. 1-7

Tabela 1-1 Leis da álgebra de conjuntos

Leis de idempotência	
(1a) $A \cup A = A$	(1b) $A \cap A = A$
Leis de associatividade	
(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leis de comutatividade	
(3a) $A \cup B = B \cup A$	(3b) $A \cap B = B \cap A$
Leis de distributividade	
(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leis de identidade	
(5a) $A \cup \varnothing = A$	(5b) $A \cap U = A$
(6a) $A \cup U = U$	(6b) $A \cap \varnothing = \varnothing$
Leis de involução	
(7) $(A^c)^c = A$	
Leis dos complementares[†]	
(8a) $A \cup A^c = U$	(8b) $A \cap A^c = \varnothing$
(9a) $U^c = \varnothing$	(9b) $\varnothing^c = U$
Leis de DeMorgan	
(10a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	(10b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

CONJUNTOS FINITOS, PRINCÍPIO DA ENUMERAÇÃO

Um conjunto é dito finito se contém exatamente m elementos distintos, onde m denota algum inteiro não negativo. Caso contrário, o conjunto é dito infinito. Por exemplo, o conjunto vazio, $\varnothing$, e o conjunto de letras do alfabeto são conjuntos finitos, enquanto o conjunto de inteiros positivos pares, $\{2, 4, 6, \ldots\}$, é infinito.

A notação $n(A)$ será usada para denotar o número de elementos de um conjunto finito A[†]. Alguns textos usam $\#(A)$, $|A|$ ou card(A) em vez de $n(A)$.

Lema 1-4: se A e B são conjuntos finitos disjuntos, então $A \cup B$ é finito e

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Teorema 1-5: se A e B são conjuntos finitos, então $A \cup B$ e $A \cap B$ são finitos e

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Exemplo 1.7 Considere os seguintes dados sobre 120 estudantes de matemática no que diz respeito aos idiomas francês, alemão e russo.

65 estudam francês,
45 estudam alemão,
42 estudam russo,
20 estudam francês e alemão,
25 estudam francês e russo,
15 estudam alemão e russo,
8 estudam os três idiomas.

Sejam F, A e R os conjuntos de alunos que estudam francês, alemão e russo, respectivamente. Queremos determinar o número de alunos que estudam pelo menos um dos três idiomas e preencher o diagrama de Venn da Figura 1-9 com o número correto de estudantes em cada região.

Partes de um Conjunto†

Para um dado conjunto S, podemos falar do conjunto de todos os subconjuntos de S. Essa classe é chamada de conjunto das *partes* de S e será denotada por Partes(S). Se S é finito, então Partes(S) também é. Na verdade, o número de elementos de Partes(S) é 2 elevado à cardinalidade de S; isto é,

$$n(\text{Partes}(S)) = 2^{n(S)}$$

(Por esta razão, o conjunto das partes de S é geralmente denotado por 2^S.)

Exemplo 1-9 Suponha que $S = \{1, 2, 3\}$. Então,

$$\text{Partes}(S) = [\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, S].$$

P(s)

Partições

Seja S um conjunto não vazio. Uma partição de S é uma subdivisão de S em conjuntos não vazios disjuntos. Mais precisamente, uma *partição* de S é uma coleção $\{ A_i \}$ de subconjuntos não vazios de S tais que:

(i) Cada a em S pertence a algum dos A_i.
(ii) Os conjunto em $\{ A_i \}$ são disjuntos dois a dois; isto é, se

Exemplo 1.10 Considere a seguinte coleção de subconjuntos de $S = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$:

(i) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 8, 9\}]$

(ii) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{5, 7, 9\}]$

(iii) $[\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}]$

Então (i) não é uma partição de S, pois 7 pertence a S e não está em nenhum dos subconjuntos. Além do mais, (ii) não é uma partição de S, já que $\{1, 3, 5\}$ e $\{5, 7, 9\}$ não são disjuntos. Por outro lado, (iii) é uma partição de S.

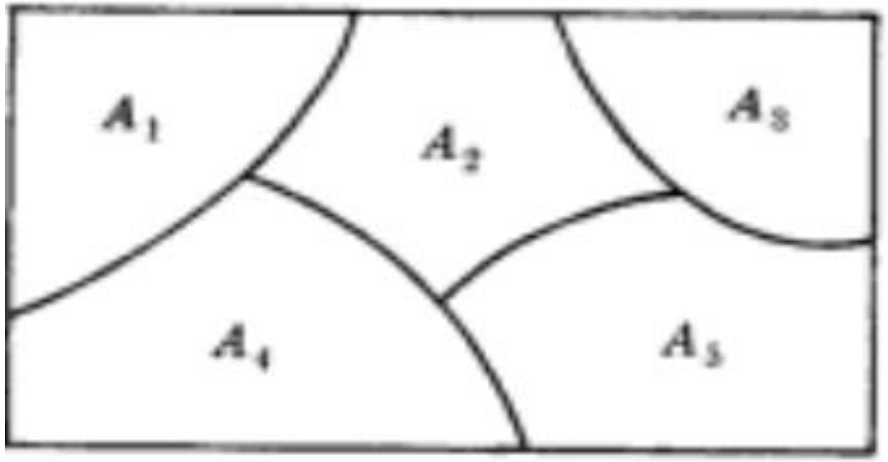


Fig. 1-11

Generalização de Operações entre Conjuntos

As operações de união e interseção entre dois conjuntos foram definidas acima. Tais operações podem ser estendidas para um número finito ou infinito de conjuntos como segue.

Considere primeiramente um número finito de conjuntos, $A_1, A_2, \ldots, A_m$. A união e a interseção desses conjuntos é, repectivamente, denotada e definida por:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = \cup_{i=1}^{m} A_i = \{x: x \in A_i \text{ para algum } A_i\} \text{ e}$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m = \cap_{i=1}^{m} A_i = \{x: x \in A_i \text{ para todo } A_i\}$$

Seja A uma coleção qualquer de conjuntos. A união e a interseção de conjuntos na coleção A são denotadas e definidas, respectivamente, por

$$\cup(A: A \in \mathsf{A}) = \{x: x \in A \text{ para algum } A \in \mathsf{A}\} \text{ e}$$
$$\cap(A: A \in \mathsf{A}) = \{x: x \in A \text{ para todo } A \in \mathsf{A}\}.$$

Exemplo 1.11 Considere os conjuntos

$$A_1 = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbf{N}, \qquad A_2 = \{2, 3, 4, \ldots\}, \qquad A_3 = \{3, 4, 5, \ldots\}, \qquad A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}.$$

A união e a interseção dos conjuntos são:

$$\cup(A_n \colon n \in \mathbf{N}) = \mathbf{N} \quad \text{e} \quad \cap(A_n \colon n \in \mathbf{N}) = \varnothing.$$

As Leis de DeMorgan também são válidas para as operações generalizadas definidas acima. Isto é:

Teorema 1-7: seja A uma coleção de conjuntos. Então:

$$\text{(i)} \quad (\cup(A \colon A \in \mathsf{A}))^c = \cap(A^c \colon A \in \mathsf{A}),$$

$$\text{(ii)} \quad (\cap(A \colon A \in \mathsf{A}))^c = \cup(A^c \colon A \in \mathsf{A}).$$

Considere os seguintes conjuntos:

$$\varnothing, \quad A = \{1\}, \quad B = \{1,3\}, \quad C = \{1,5,9\}, \quad D = \{1,2,3,4,5\},$$
$$E = \{1,3,5,7,9\}, \quad U = \{1,2,\ldots,8,9\}.$$

Insira o símbolo correto, $\subseteq$ ou $\not\subseteq$, em cada par de conjuntos:

(a) $\varnothing$, A	(c) B, C	(e) C, D	(g) D, E
(b) A, B	(d) B, E	(f) C, E	(h) D, U

1.4 Mostre que $A = \{2, 3, 4, 5\}$ não é um subconjunto de $B = \{x : x \in \mathbf{N}, x \text{ é par}\}$.

1.5 Mostre que $A = \{2, 3, 4, 5\}$ é um subconjunto próprio de $C = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$.

Os Problemas 1.6 e 1.8 se referem ao conjunto universo $U = \{1, 2, \ldots, 9\}$ e aos conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad C = \{5, 6, 7, 8, 9\}, \quad E = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$B = \{4, 5, 6, 7\}, \quad D = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad F = \{1, 5, 9\}$$

1.6 Determine:

(a) $A \cup B$ e $A \cap B$ (c) $A \cup C$ e $A \cap C$ (e) $E \cup E$ e $E \cap E$

(b) $B \cup D$ e $B \cap D$ (d) $D \cup E$ e $D \cap E$ (f) $D \cup F$ e $D \cap F$

1.8 Determine (*a*) $A \cap (B \cup E)$; (*b*) $(A \backslash E)^c$;
(*c*) $(A \cap D) \backslash B$; (*d*) $(B \cap F) \cup (C \cap E)$.

(*a*) Primeiramente compute $B \cup E = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Então, $A \cap (B \cup E) = \{2, 4, 5\}$.

(*b*) $A \backslash E = \{1, 3, 5\}$. Então, $(A \backslash E)^c = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$.

(*c*) $A \cap D = \{1, 3, 5\}$. Conclua $(A \cap D) \backslash B = \{1, 3\}$.

(*d*) $B \cap F = \{5\}$ e $C \cap E = \{6, 8\}$. Portanto, $(B \cap F) \cup (C \cap E) = \{5, 6, 8\}$.

1.9 Mostre que é possível que $A \cap B = A \cap C$ sem que $B = C$.

1.10 Considere o diagrama de Venn de dois conjuntos arbitrários A e B na Figura 1-1(c). Assinale os conjuntos: (a) $A \cap B^c$; (b) $(B \backslash A)^c$.

1.13 Determine quais dos seguintes conjuntos são finitos:

(a) A = {estações do ano}

(b) B = {estados nos Estados Unidos}

(c) C = {inteiros positivos menores do que 1}

(d) D = {inteiros ímpares}

(e) E = {divisores inteiros positivos de 12}

(f) F = {gatos que vivem nos Estados Unidos}

(a) A é finito pois existem quatro estações no ano, i.e., $n(A) = 4$.

(b) B é finito porque existem 50 estados nos Estados Unidos, i.e., $n(B) = 50$.

(c) Não existem inteiros positivos menores do que 1; logo, C é vazio. Portanto, C é finito e $n(C) = 0$.

(d) D é infinito.

(e) Os divisores inteiros positivos de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12. Portanto, E é finito e $n(E) = 6$.

(f) Embora possa ser difícil determinar o número de gatos que vivem nos Estados Unidos, existe um número finito deles em qualquer tempo. Portanto, F é finito.

Em uma pesquisa com 60 pessoas, verificou-se que:

25 lêem a *Newsweek*,
26 lêem *Time*,
26 lêem *Fortune*,
9 lêem *Newsweek* e *Fortune*,
11 lêem *Newsweek* e *Time*,
8 lêem *Time* e *Fortune*,
3 lêem as três revistas.

(*a*) Ache o número de pessoas que lêem pelo menos uma das três revistas.
(*b*) Preencha, com o número correto de pessoas, cada uma das oito regiões no diagrama de Venn na Figura 1-16(*a*), onde N, T e F denotam, respectivamente, o conjunto de pessoas que lêem *Newsweek*, *Time* e *Fortune*.
(*c*) Ache o número de pessoas que lêem exatamente uma revista.