

OPERAÇÕES COM VETORES

Adição de vetores

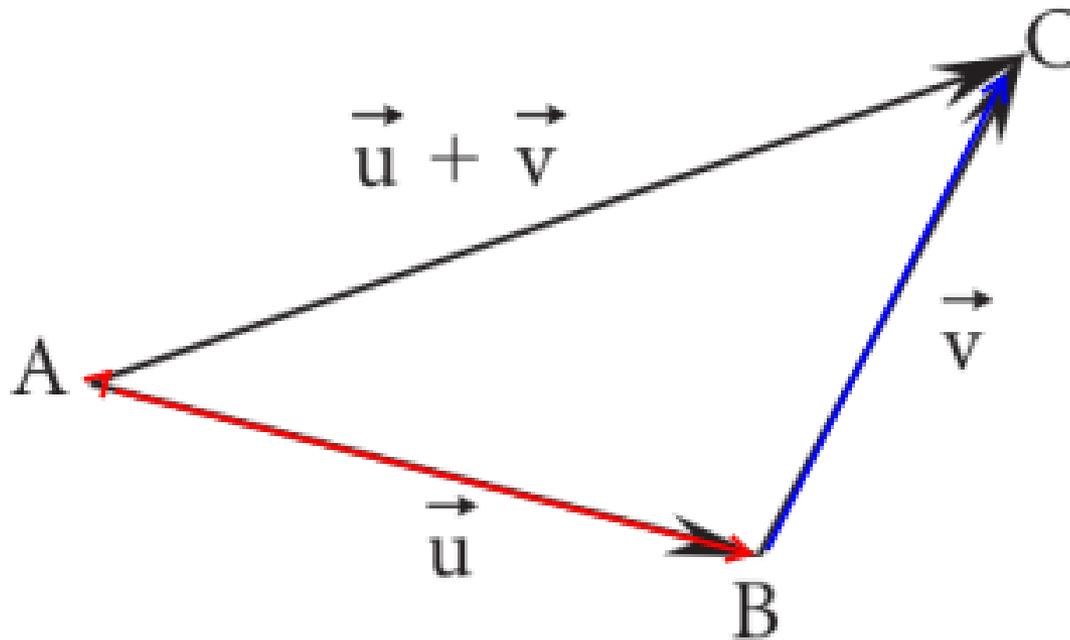
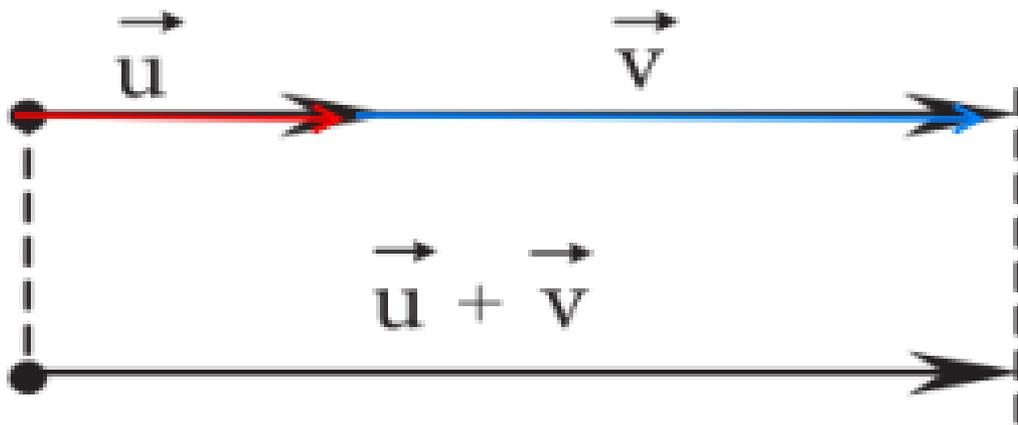


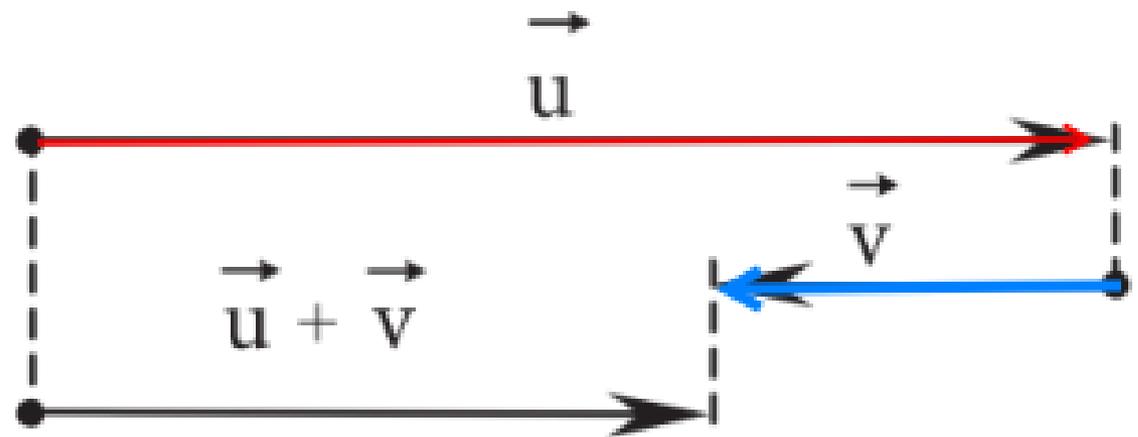
Figura 1.14

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$\vec{u} // \vec{v}$, a maneira de obter o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ é a mesma e está ilustrada na Figura 1.15(a) (\vec{u} e \vec{v} de mesmo sentido) e na Figura 1.15(b) (\vec{u} e \vec{v} de sentidos contrários).



(a)



(b)

Figura 1.15

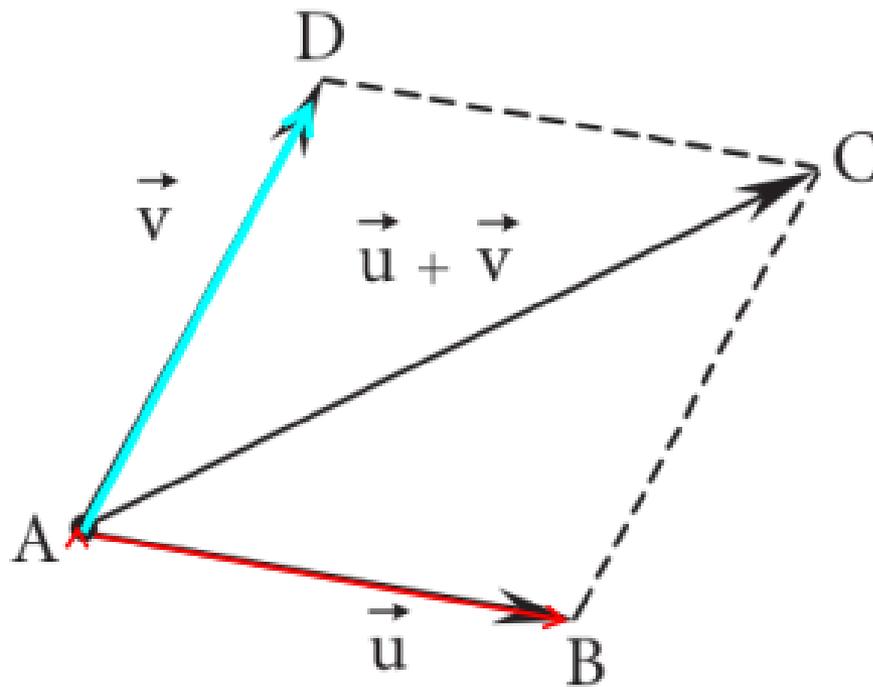
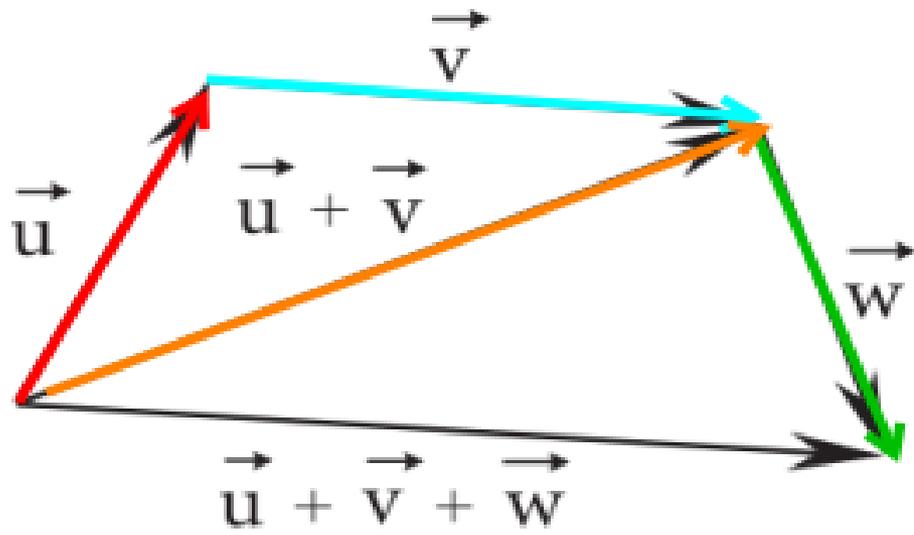


Figura 1.16

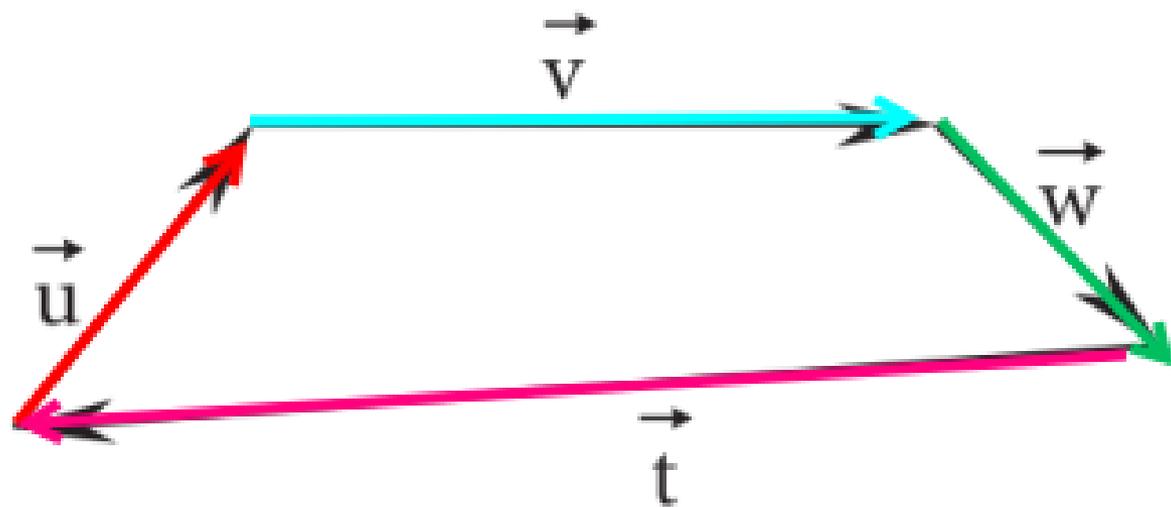
$$\vec{u} + \vec{v} = \overline{AC} \quad \text{ou} \quad \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$$

corresponde à diagonal do paralelogramo,



(a)

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t} = \vec{0})$$



(b)

propriedades:

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

III) Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

IV) Elemento oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

O vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$, escreve-se $\vec{u} - \vec{v}$, é chamado de *diferença* entre \vec{u} e \vec{v} .

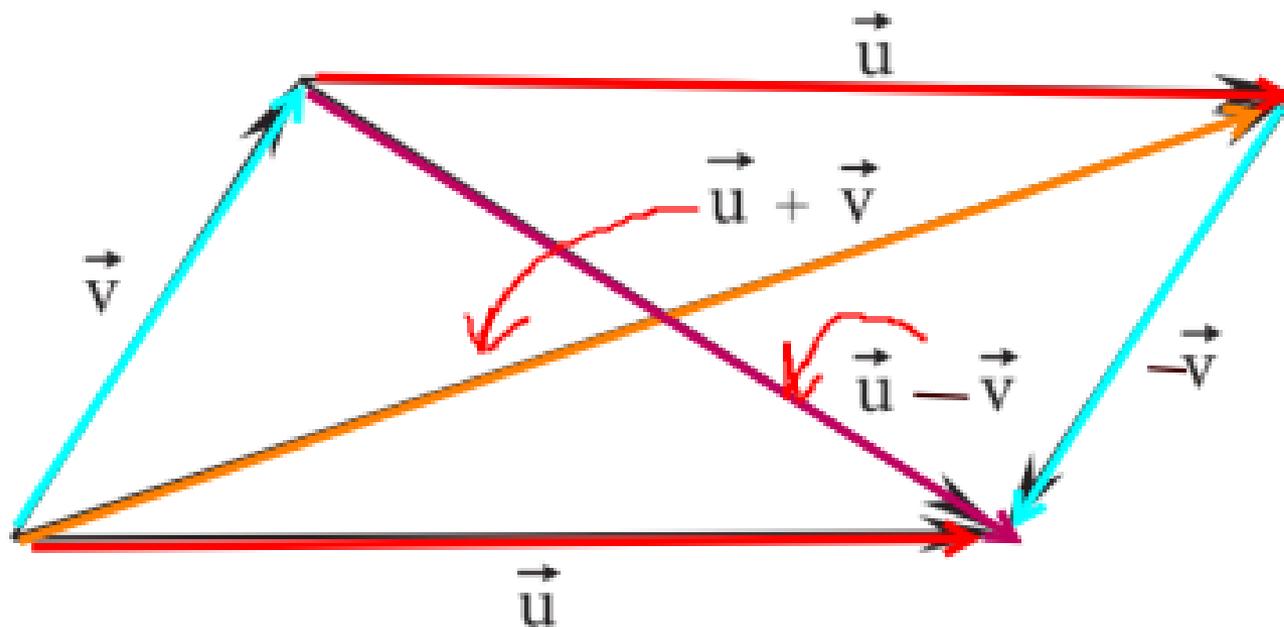


Figura 1.18

Observemos que no paralelogramo determinado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} (Figura 1.18), verifica-se que a soma $\vec{u} + \vec{v}$ é representada por uma das diagonais, enquanto a diferença $\vec{u} - \vec{v}$ pela outra diagonal.

1. Com base na Figura 1.12, determinar os vetores a seguir, expressando-os com origem no ponto A:

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

e) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EO}$

i) $\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{NP}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

f) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BL}$

j) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$

g) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AN}$

k) $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NF}$

d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AK}$

h) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OE}$

l) $\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PB}$

Solução

a) \overrightarrow{AN}

c) \overrightarrow{AB}

e) \overrightarrow{AM}

g) \overrightarrow{AH}

i) \overrightarrow{AC}

k) \overrightarrow{AE}

b) \overrightarrow{AD}

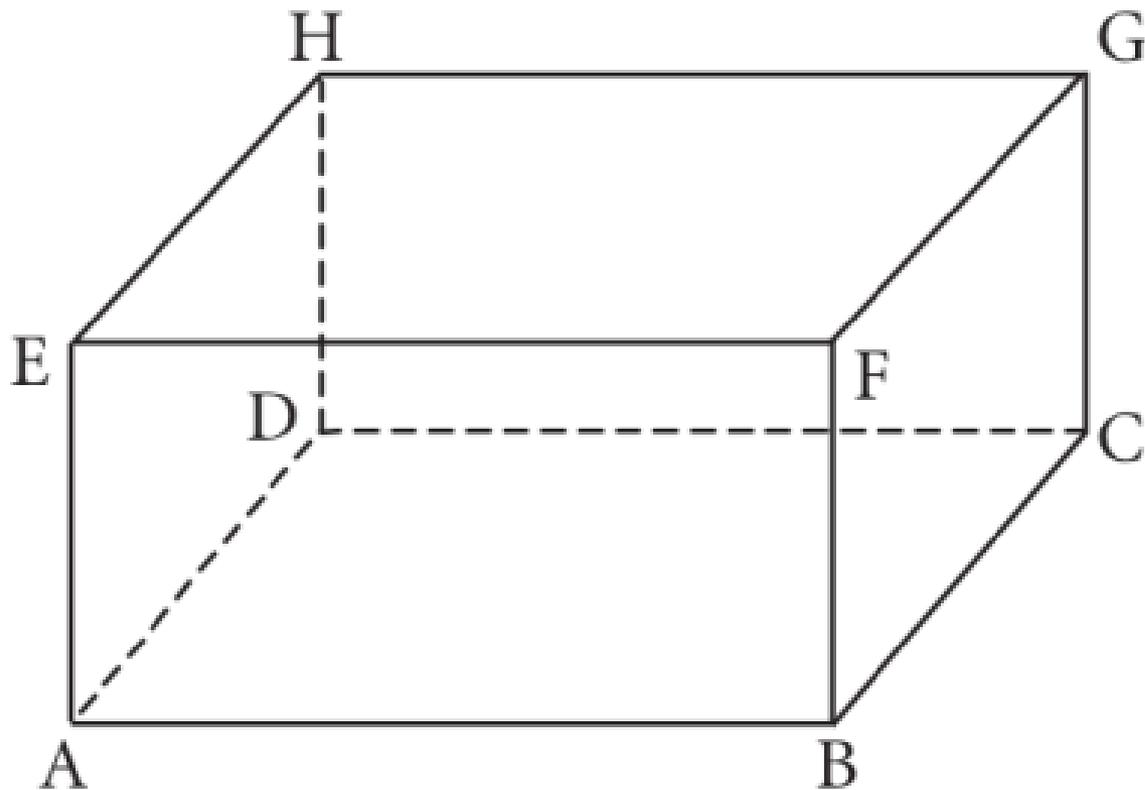
d) \overrightarrow{AO}

f) \overrightarrow{AK}

h) \overrightarrow{AI}

j) \overrightarrow{AC}

l) $\overrightarrow{AA} = 0$



2. Com base na Figura 1.13, determinar os vetores a seguir, expressando-os com origem no ponto A:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$

c) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EH}$

d) $\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$

f) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FB}$

g) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

h) $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FH}$

Multiplicação de número real por vetor

vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $\alpha \neq 0$, chama-se *produto do número real α pelo vetor \vec{v}* , o vetor $\alpha\vec{v}$ tal que:

- módulo:** $|\alpha\vec{v}| = |\alpha| |\vec{v}|$, ou seja, o comprimento $\alpha\vec{v}$ é igual ao comprimento de \vec{v} multiplicado por $|\alpha|$;
- direção:** $\alpha\vec{v}$ é paralelo a \vec{v} ;
- sentido:** $\alpha\vec{v}$ e \vec{v} têm o mesmo sentido se $\alpha > 0$ e contrário se $\alpha < 0$.

Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.

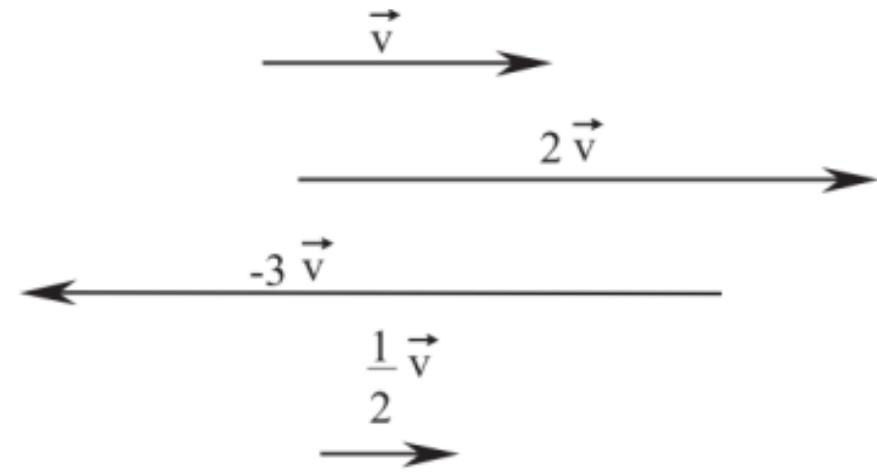


Figura 1.20

Vimos em *Casos Particulares de Vetores*, Figura 1.8, que a cada vetor \vec{v} , $\vec{v} \neq \vec{0}$, é possível associar dois vetores unitários paralelos a \vec{v} . O vetor unitário $\frac{1}{|\vec{v}}\vec{v}$ ou $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ de mesmo sentido de \vec{v} é o versor de \vec{v} .

Por exemplo,

se $|\vec{v}| = 5$, o versor de \vec{v} é $\frac{\vec{v}}{5}$;

se $|\vec{v}| = \frac{1}{3}$, o versor de \vec{v} é $3\vec{v}$;

se $|\vec{v}| = 10$, o versor de $-\vec{v}$ é $-\frac{\vec{v}}{10}$.

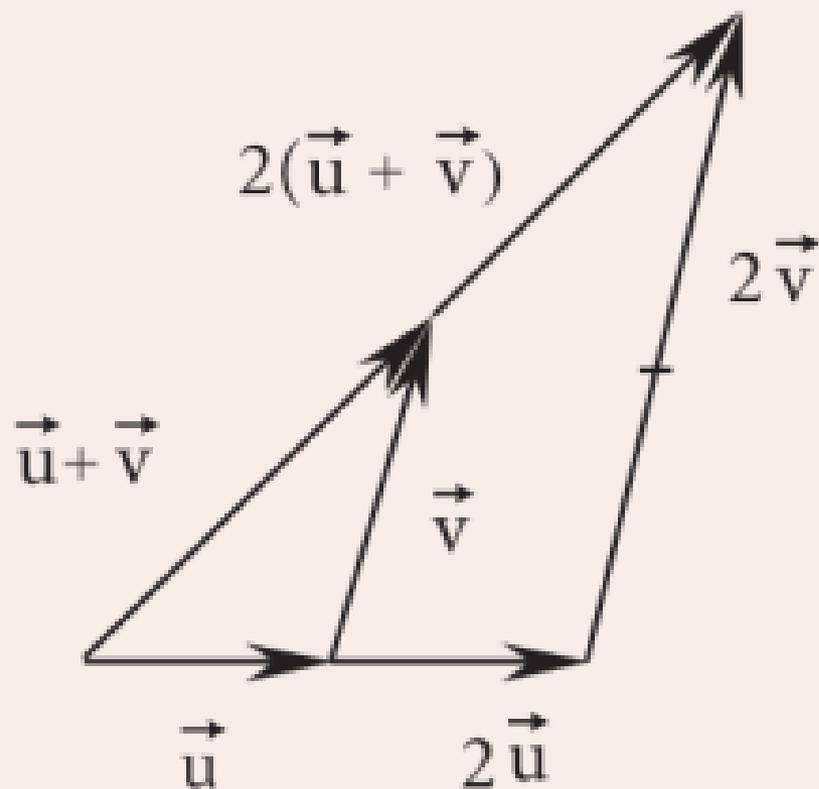
Se \vec{u} e \vec{v} são vetores quaisquer e α e β números reais, a multiplicação de número real por vetor admite as propriedades:

I) $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$

II) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

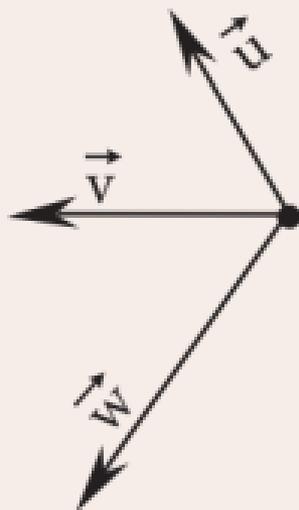
III) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

IV) $1\vec{v} = \vec{v}$

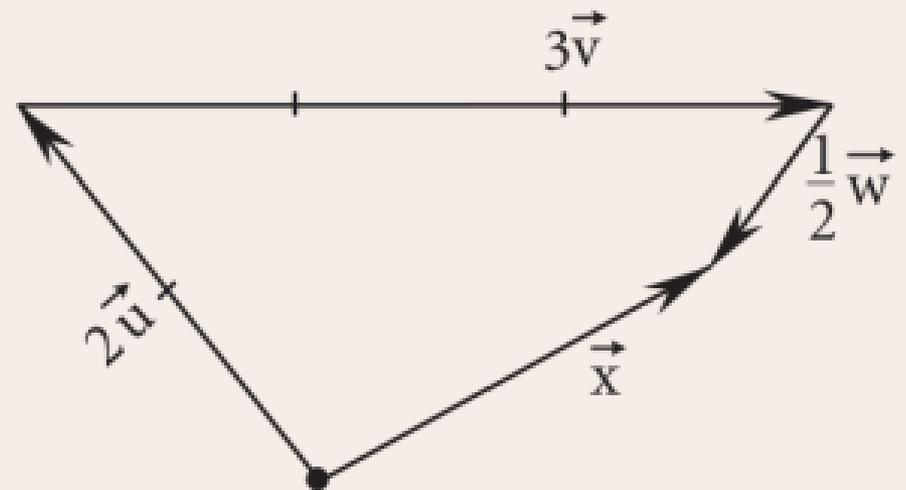


Exemplos

Representados os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} como na Figura 1.25(a), obter graficamente o vetor \vec{x} tal que $\vec{x} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.



(a)



(b)

Figura 1.25

Demonstrar que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

Seja o triângulo ABC e M e N os pontos médios dos lados CA e CB, respectivamente (Figura 1.26).

Pela figura, tem-se

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Portanto, $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$ e $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

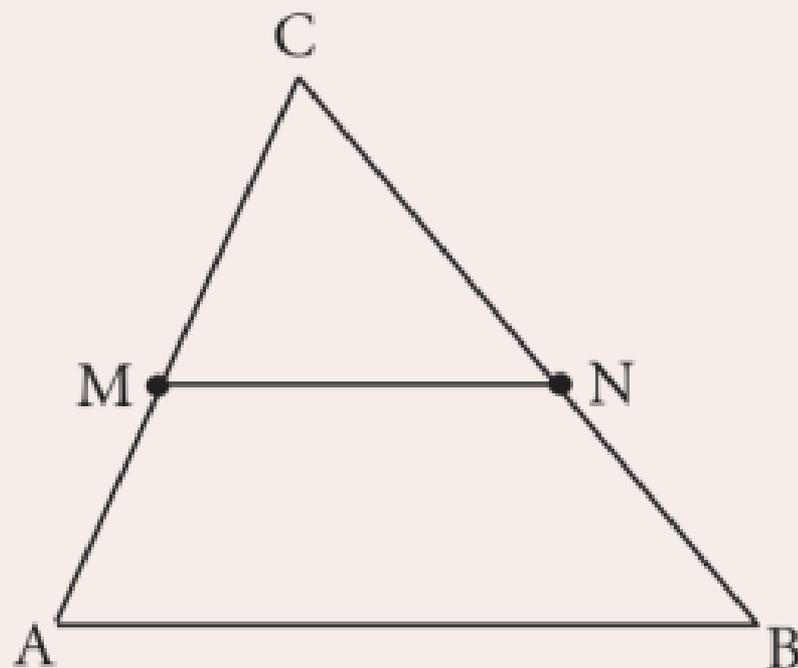


Figura 1.26