O PLANO

EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

$A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente ao plano π

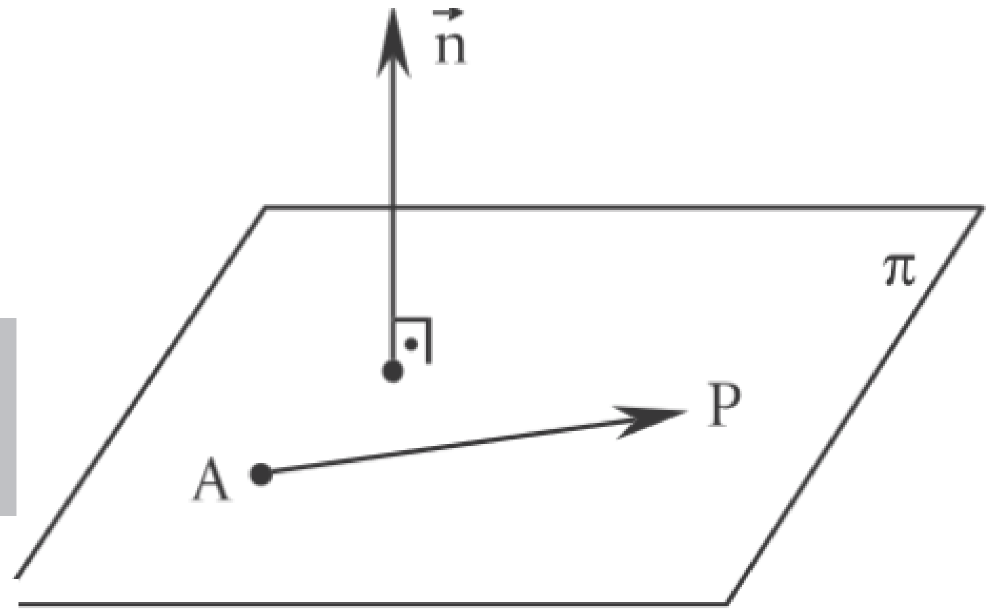
$\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, um vetor normal

$\vec{n} \perp \pi$, $\vec{n}$ é ortogonal a todo vetor

$P(x, y, z)$ pertence a π

$$\vec{n} \cdot (P - A) = 0$$

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$



equação *geral* do plano π

Observação

Se um plano π intercepta os eixos coordenados nos pontos $(p, 0, 0)$, $(0, q, 0)$ $(0, 0, r)$ com $p \cdot q \cdot r \neq 0$, então, π admite a equação

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

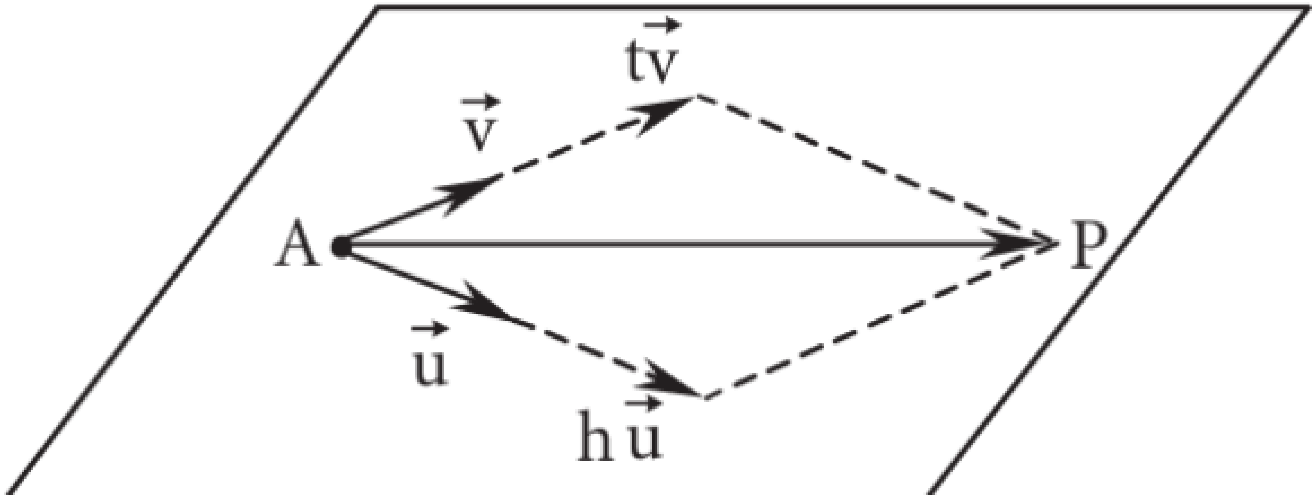
equação segmentária do plano π.

EQUAÇÃO VETORIAL E EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DO PLANO

$A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π

$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a π

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos



Para todo ponto P do plano, os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares

P(x, y, z) pertence a π se, e somente se, existirem números reais h e t

$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$$

ou

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2), \quad h, t \in \mathbb{R}$$

equação vetorial do plano π

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *vetores diretores* de π.

condição de igualdade, vem

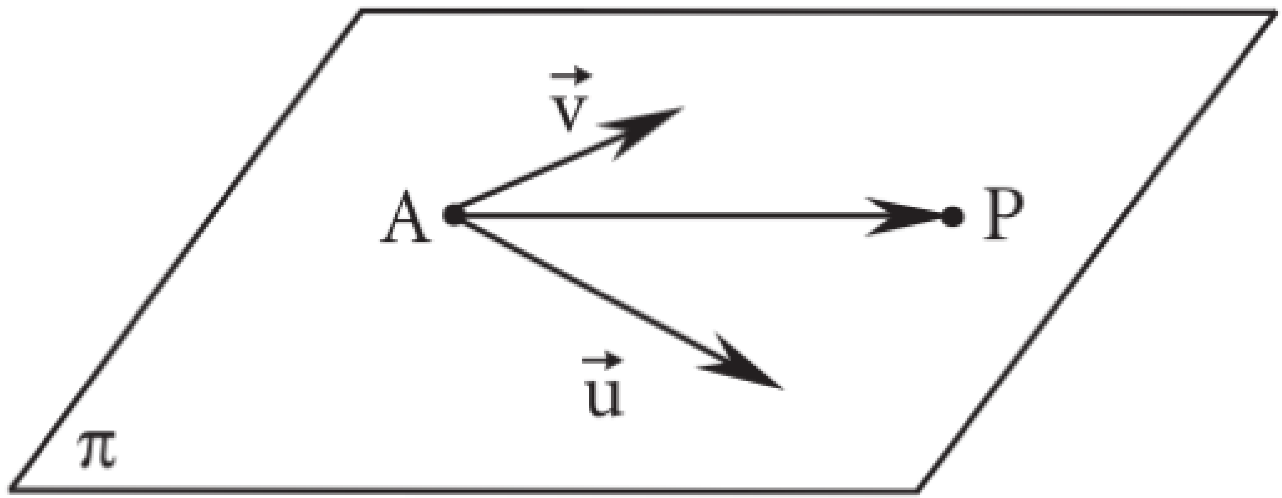
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 h + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 h + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 h + c_2 t, \quad h, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

equações paramétricas de π:

h e t são variáveis auxiliares denominadas *parâmetros*.

Observação

Existe outra maneira de obter uma equação geral de π



$$(\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares

o produto misto deles é nulo

Observações

a) Como é possível encontrar infinitos ternos A, B e C de pontos não alinhados em π, existem infinitos sistemas de equações paramétricas que representam o *mesmo* plano.

b) É importante que os vetores diretores sejam não paralelos. Se ocorrer $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$, basta trocar um dos pontos de modo a garantir $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não paralelos.

c) Outra maneira de obter equações paramétricas, a partir da equação geral, é substituir duas das variáveis pelos parâmetros h e t e, posteriormente, isolar a terceira variável em função destes. Por exemplo, se na equação geral $2x - y - z + 4 = 0$, fizermos $y = h$ e $z = t$, teremos $2x - h - t + 4 = 0$. Isolando x, resulta $x = -2 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}t$.

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}t \\ y = h \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = h \\ y = t \\ z = 4 + 2h - t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = h \\ y = 4 + 2h - t \\ z = t \end{cases}$$

CASOS PARTICULARES DA EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

$$3x + 4y + 2z - 12 = 0 \quad (4)$$

1º) Se $d = 0$

$$3x + 4y + 2z = 0$$

plano passando pela origem $O(0, 0, 0)$

2º) Se $a = 0$

$$4y + 2z - 12 = 0 \text{ (ou: } 0x + 4y + 2z - 12 = 0)$$

e representaria um plano paralelo ao eixo x, interceptando os outros dois eixos ainda em (0, 3, 0) e (0, 0, 6) (Figura 6.10).

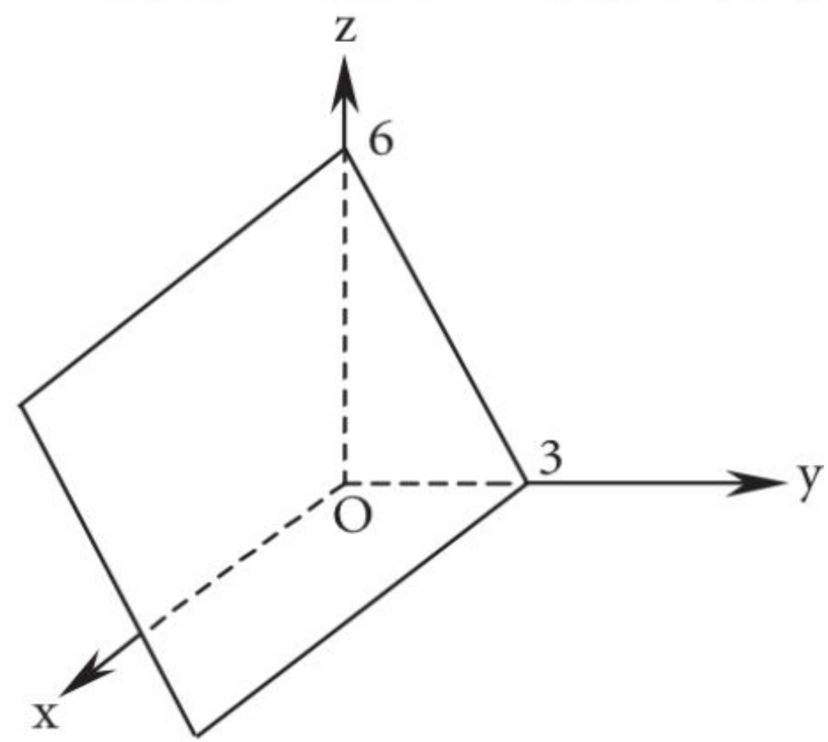


Figura 6.10

Comentários idênticos faríamos para os casos $b = 0$ ou $c = 0$, quando a equação

$3x + 2z - 12 = 0$ (Figura 6.12) $\quad$ $3x + 4y - 12 = 0$ (Figura 6.13)

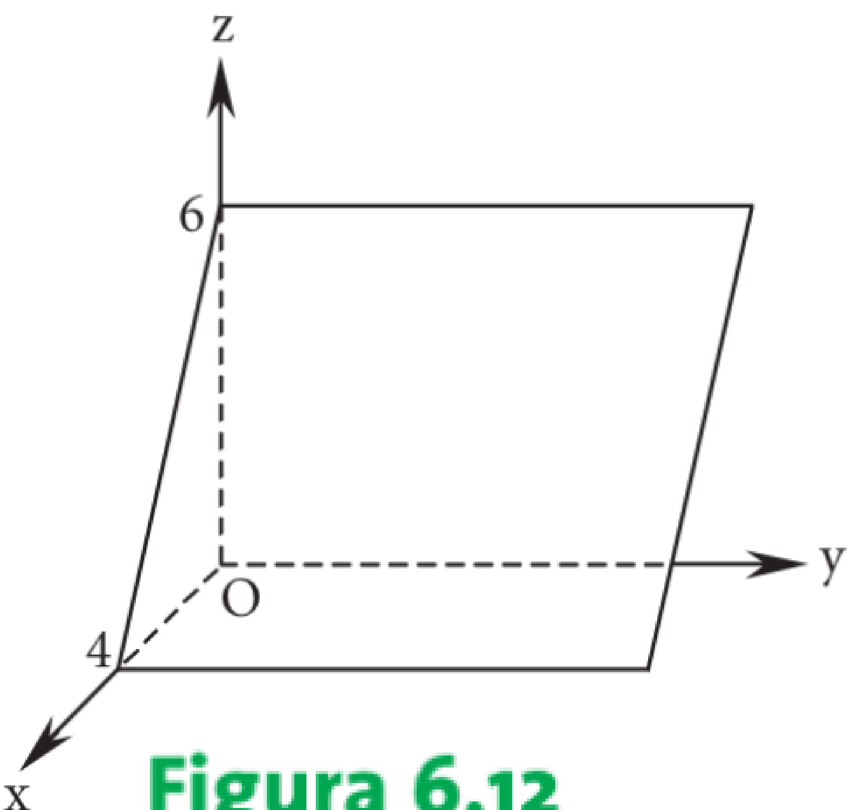


Figura 6.12

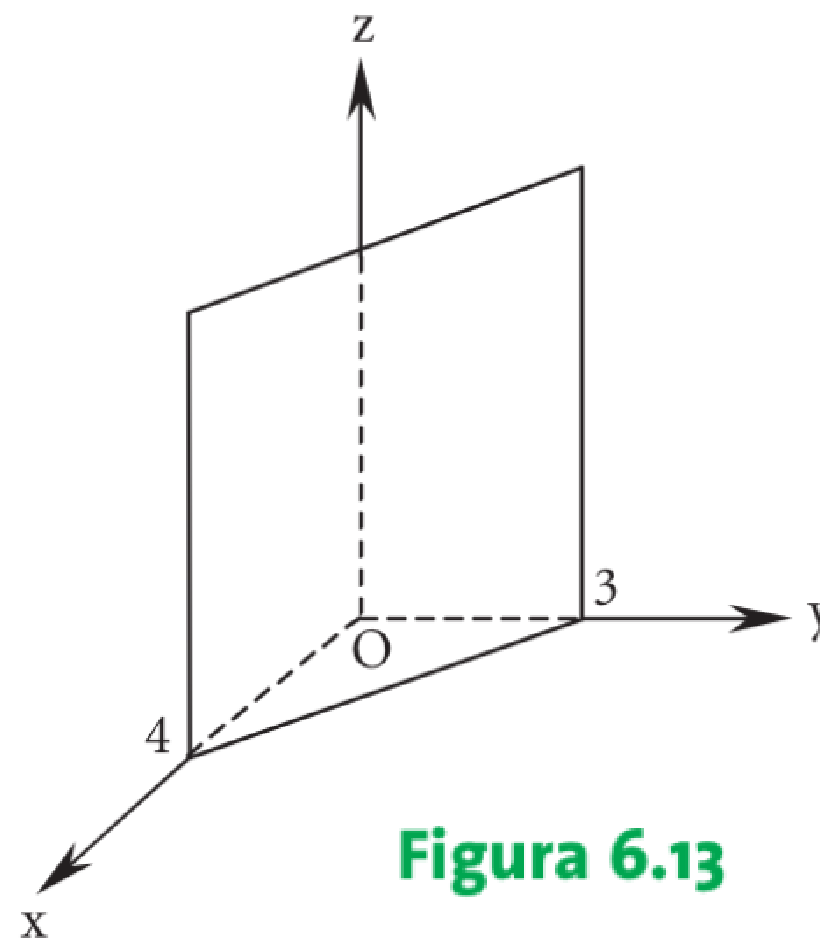
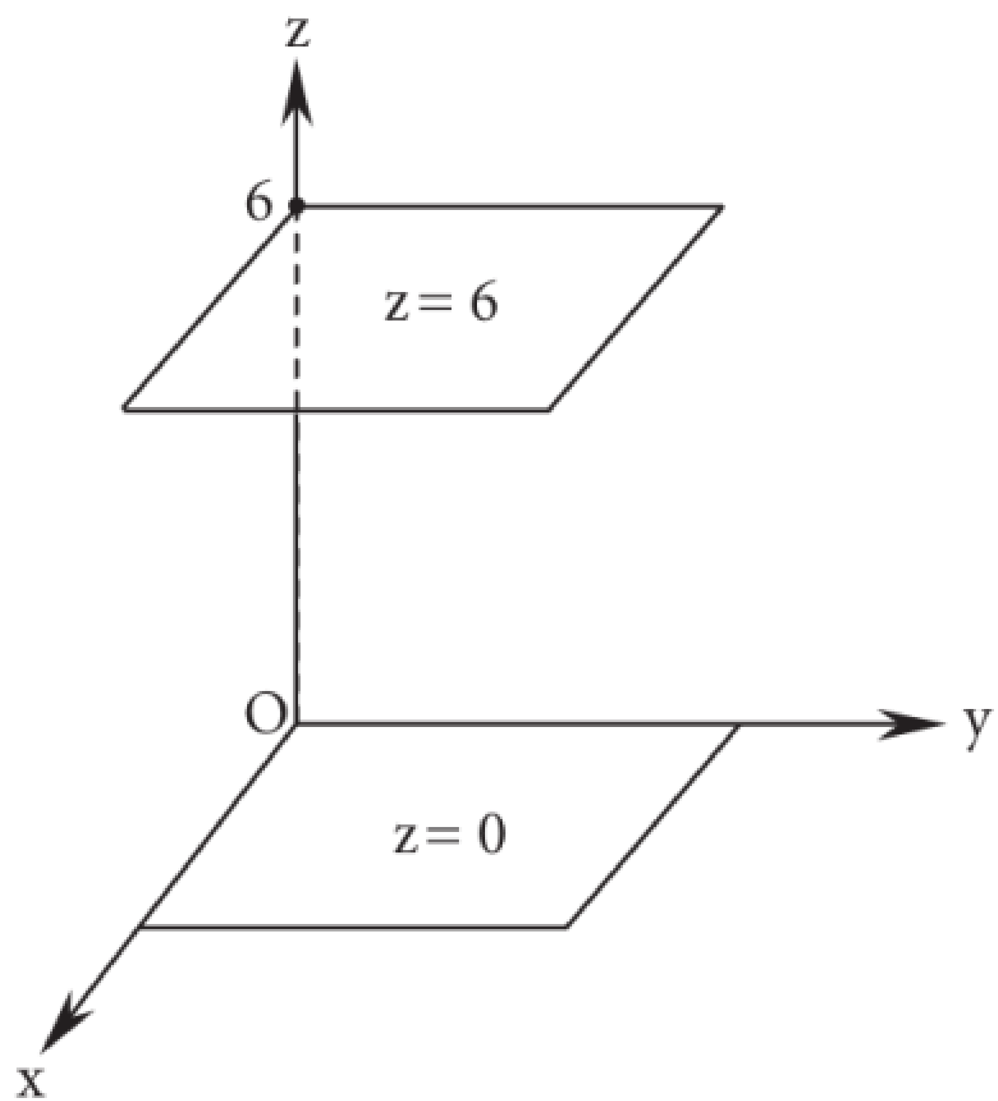


Figura 6.13

3º) Se $a = b = 0$

$2z - 12 = 0$ (ou: $0x + 0y + 2z - 12 = 0$)

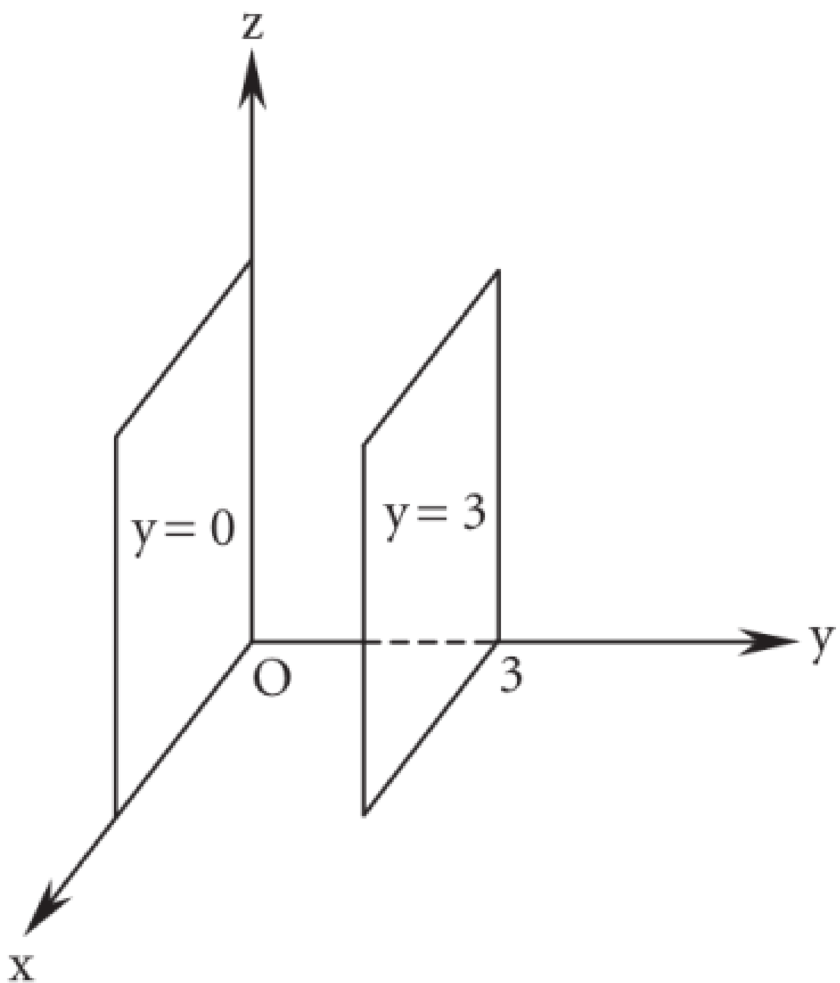
$z = 6$

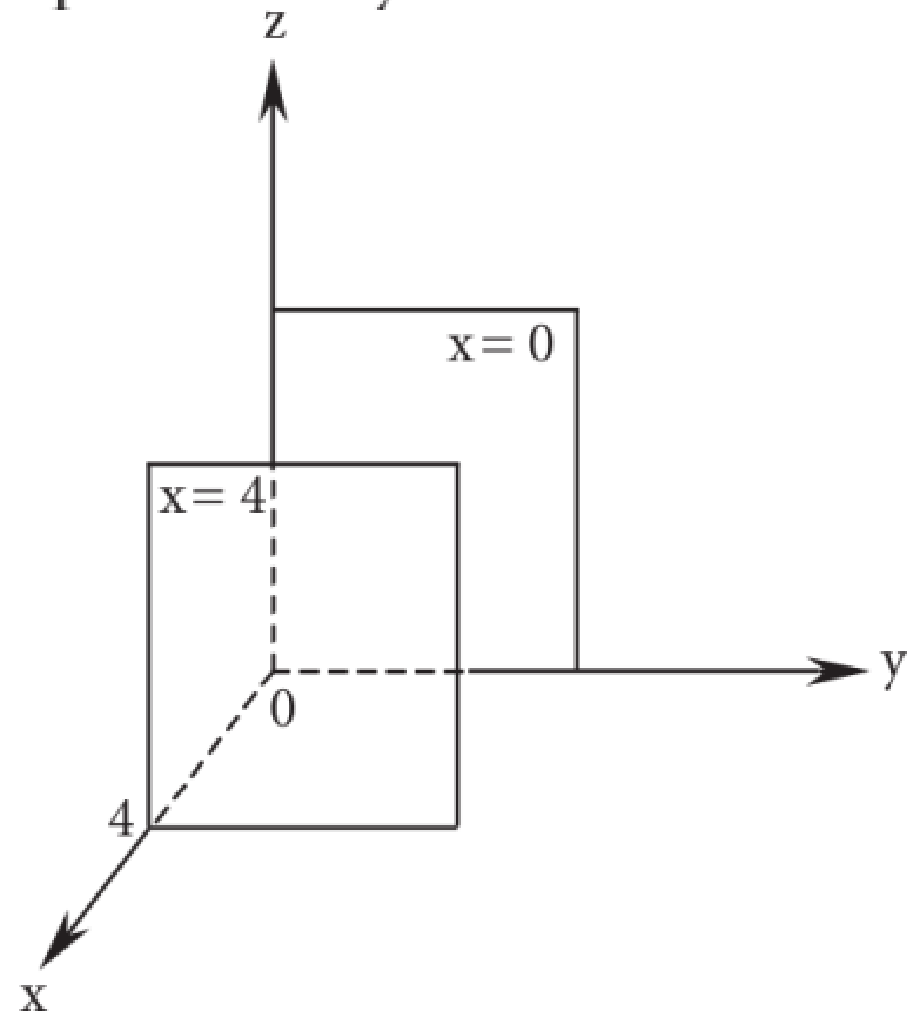


Raciocínio análogo leva-nos a concluir que

$y = k$ representa plano paralelo a xOz e

$x = k$ representa plano paralelo a yOz.

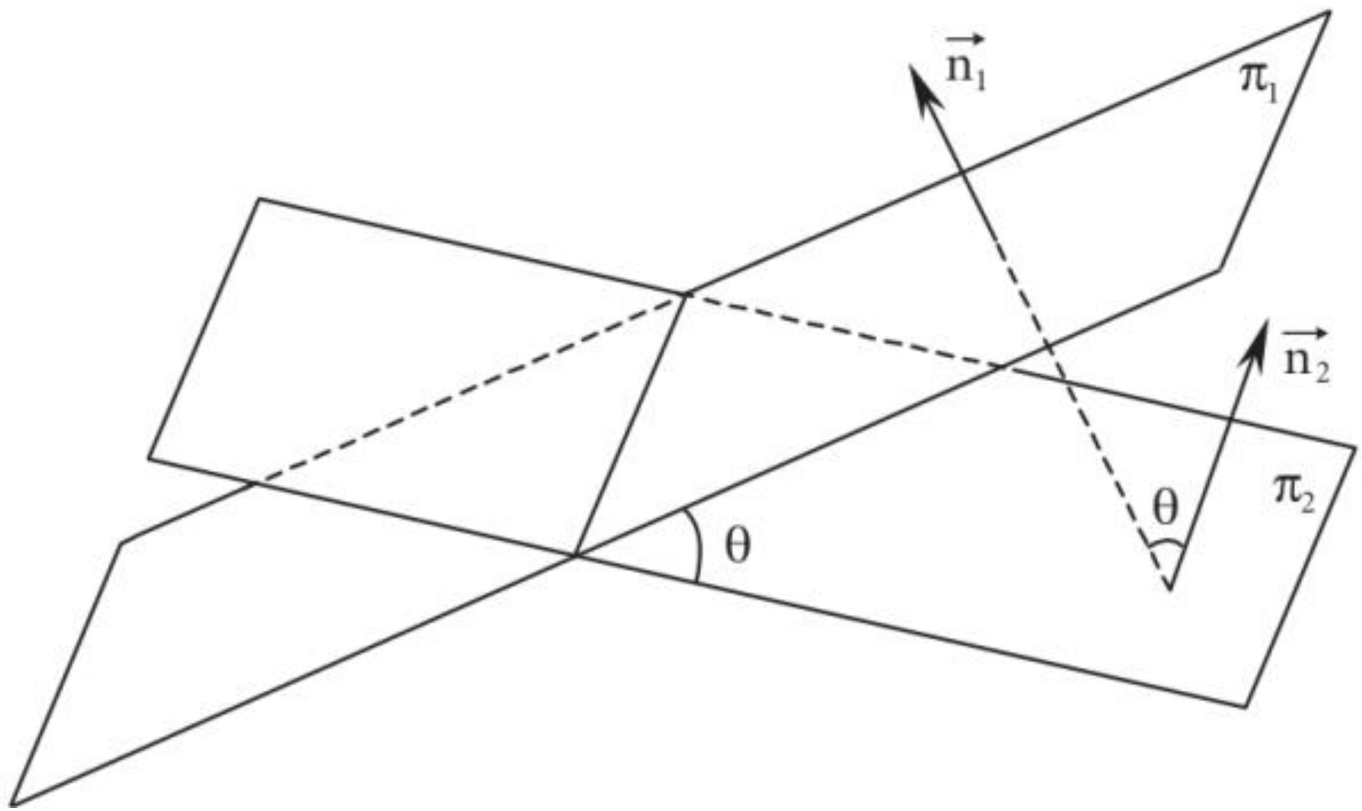




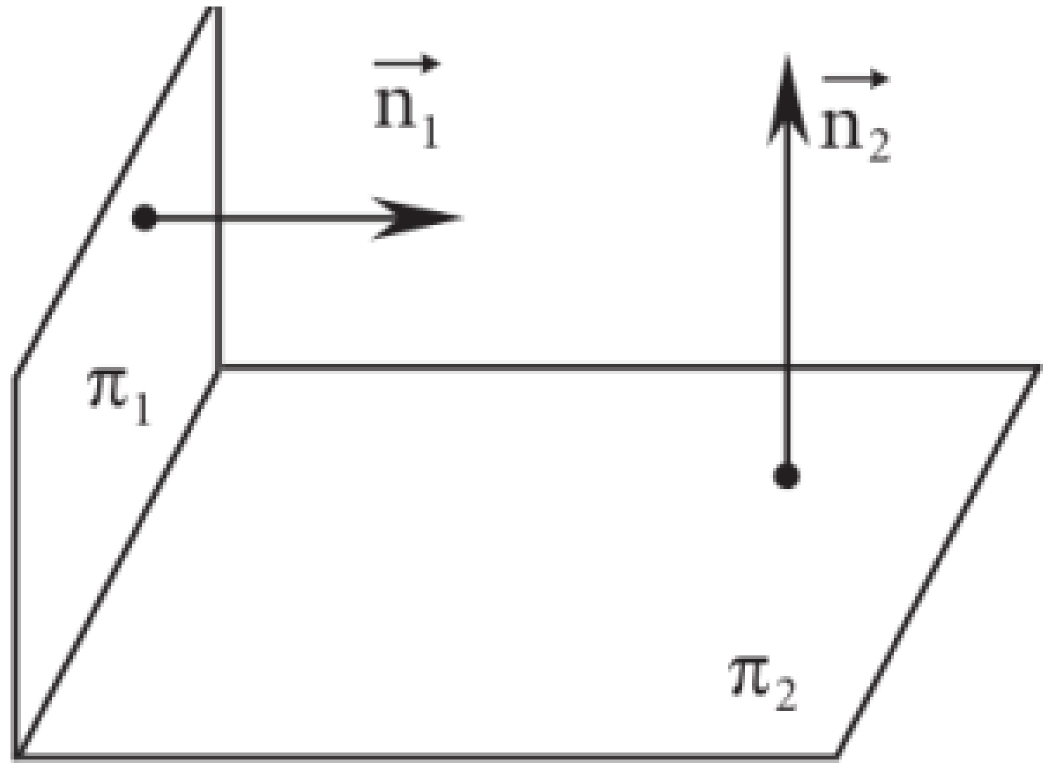
ÂNGULO DE DOIS PLANOS

ângulo de dois planos π_1 e π_2 o menor ângulo que um vetor normal a π_1 forma com um vetor normal a π_2. Sendo θ esse ângulo

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

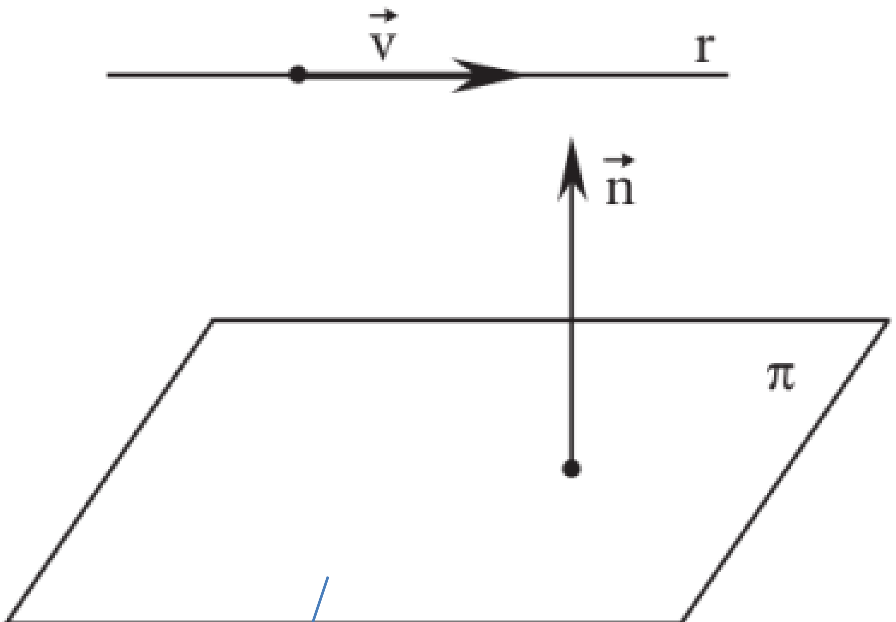


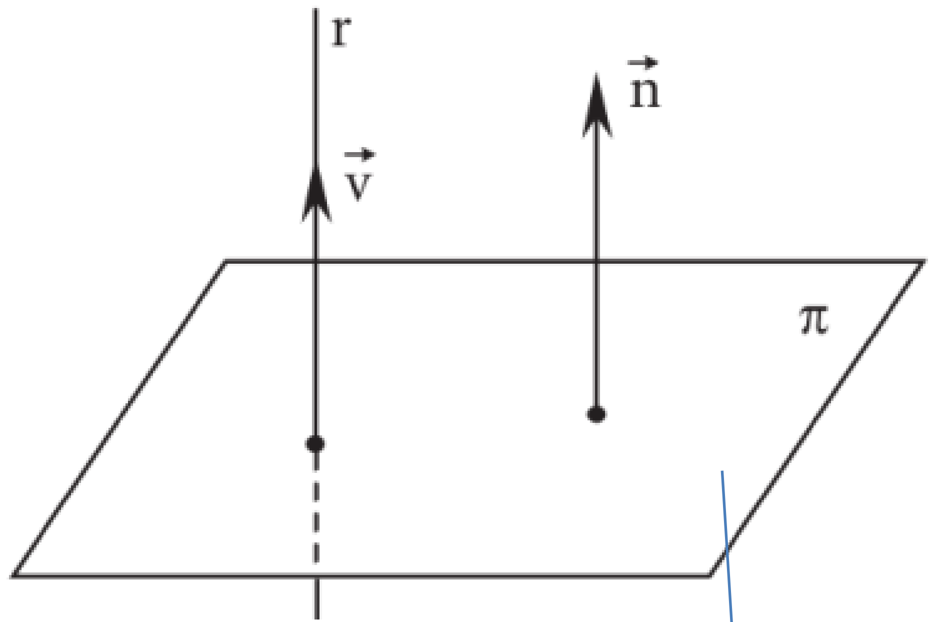
PLANOS PERPENDICULARES



$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

PARALELISMO E PERPENDICULARISMO ENTRE RETA E PLANO





$$r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

$$r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha \vec{n}$$

RETA CONTIDA EM UM PLANO

Uma reta r está contida no plano π (Figura 6.20) se

I) dois pontos A e B de r forem também de π ou

II) $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, em que $\vec{v}$ é um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal a π e $A \in \pi$, sendo $A \in r$.

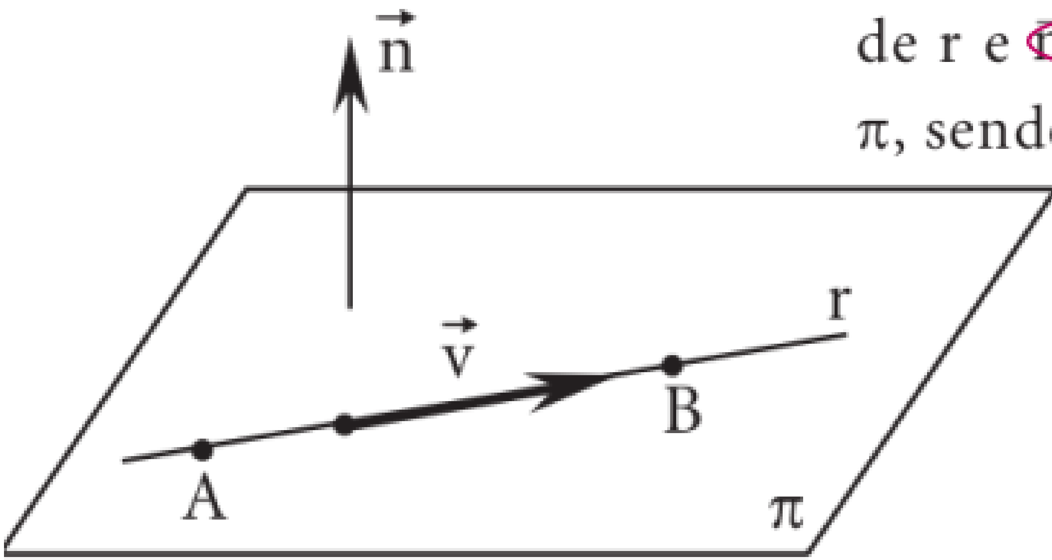


Figura 6.20

INTERSEÇÃO DE DOIS PLANOS

A interseção de dois planos não paralelos é uma reta r cujas equações se deseja

1) Como r está contida nos dois planos, as coordenadas de qualquer ponto $(x,y,z) \in r$ devem satisfazer, simultaneamente, as equações dos dois planos.

$$\downarrow$$

solução do sistema

2) Outra maneira de obter equações de r é determinar um de seus pontos e um vetor diretor.

$$\downarrow$$

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

INTERSEÇÃO DE RETA COM PLANO

1. A interseção é vazia, ie, a reta é paralela ao plano.

2. A interseção é a própria reta (reta contida no plano).

3. A interseção é um ponto.

determinar uma equação geral do plano

4. Que passa pelo ponto médio do segmento de extremos A(5,–1,4) e B(–1,–7,1) e é perpendicular a ele.

6. Sendo

$$\begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 2h - 2t \end{cases}$$

equações paramétricas de um plano π, obter uma equação geral.

escrever uma equação geral e um sistema de equações paramétricas do plano

7. A(1, 0, 2), B(–1, 2, –1) e C(1, 1, –1).