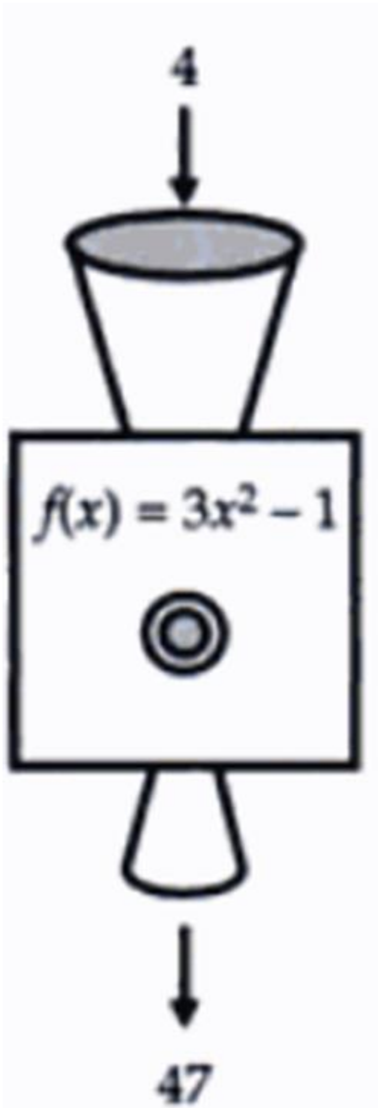
FUNÇÃO



Regra

*L*ei de Formação

Propriedade

Definição: Uma relação f é chamada função desde que $(a,b) \in f$ e $(a,c) \in f$ impliquem $b=c$.

A definição acima equivale a dizer que : uma relação f não é uma função se existem a,b,c com $(a,b) \in f$ e $(a,c) \in f$ e $b \neq c$.

Exemplos:

- (a) $f=\{(1,2),(3,4),(7,5),(4,4)\}$ é função
- (b) $g=\{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ não é função
- (c) $h=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ é função
- (d) $k=\{(0,4),(1,4),(2,4),(4,4)\}$ é função

Notação

Os matemáticos usualmente se referem a função como $f(x)=y$ em detrimento da notação $(x,y)\in f$. Esta notação em muitos casos tem vantagens quando comparada a notação de relação.

Exemplo:

$$f=\{\ldots(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4),\ldots\}$$

$$\text{ou} \quad f=\{(x,y)\in Z\text{x}Z\text{: } y=x^2\}$$

Dominio e Imagem de uma Função

Seja f uma função. ***O conjunto de todos os primeiros elementos possíveis dos pares ordenados de f é chamado de domínio de f (Dom (f)).*** ***O conjunto de todos os segundos elementos possíveis dos pares ordenados de f se chama imagem de f (Im(f)).***

Em outra notação,

$$\operatorname{dom} f = \{a : \exists b, (a, b) \in f\} \quad \text{e} \quad \operatorname{im} f = \{b : \exists a, (a, b) \in f\}.$$

Alternativamente, podemos escrever

$$\operatorname{dom} f = \{a : f(a) \text{ está definido}\} \quad \text{e} \quad \operatorname{im} f = \{b : b = f(a) \text{ para algum } a\}.$$

Exemplos

Seja $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 7)\}$.

$$\operatorname{dom} f = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{e} \quad \operatorname{im} f = \{1, 2, 3, 7\}.$$

$$f = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, y = x^2\}.$$

O domínio de f é o conjunto de todos os inteiros
imagem de f é o conjunto de
todos os quadrados perfeitos.

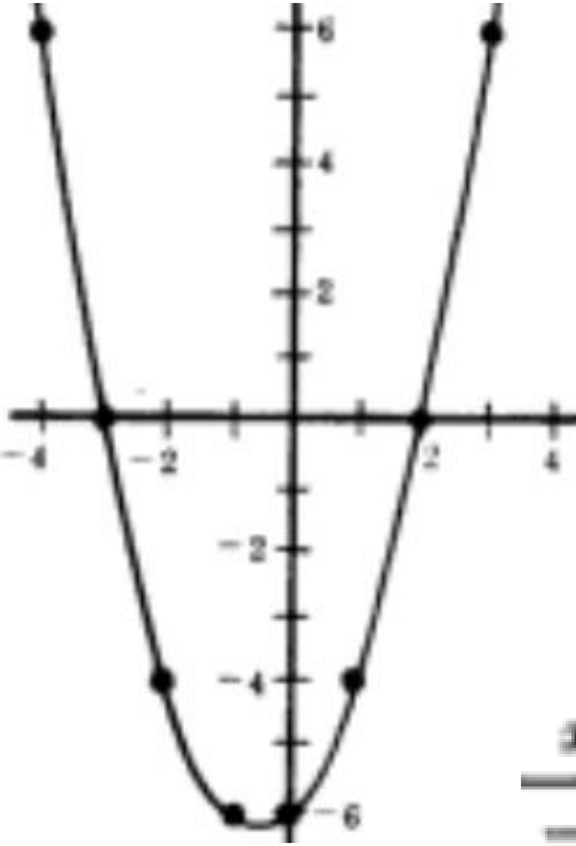
Obs.:

A notação $f:A \to B$ significa que "f é uma função de A para B",ie, $Dom(f)=A$ e $Im(f) \subseteq B$.

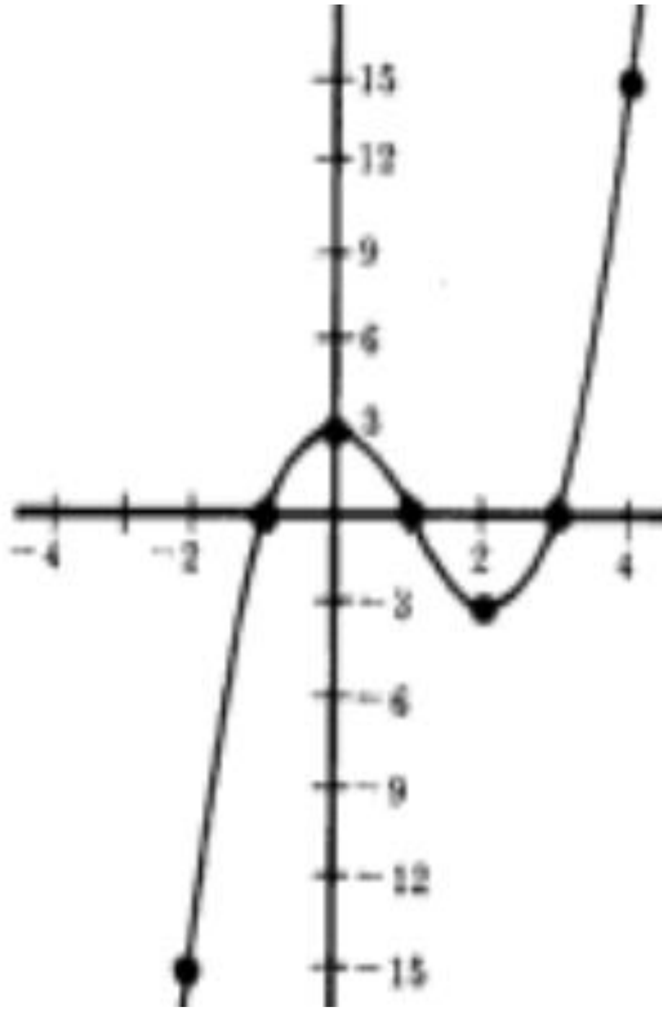
Gráficos de funções

Seja a função $f=\{(x,y) \in AxB : y=f(x)\}$ então o gráfico de f é representado no plano cartesiano.

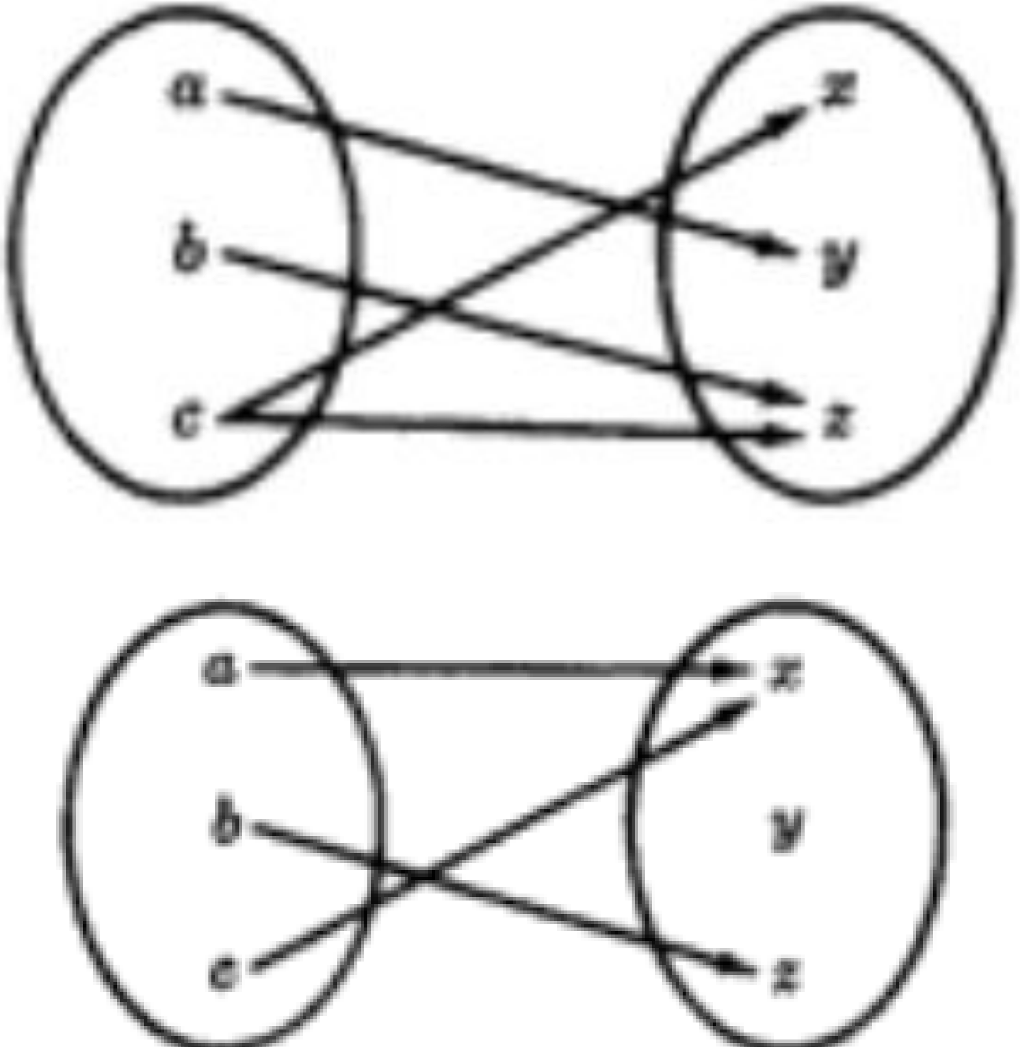
x	$f(x)$
-4	6
-3	0
-2	-4
-1	-6
0	-6
1	-4
2	0
3	6



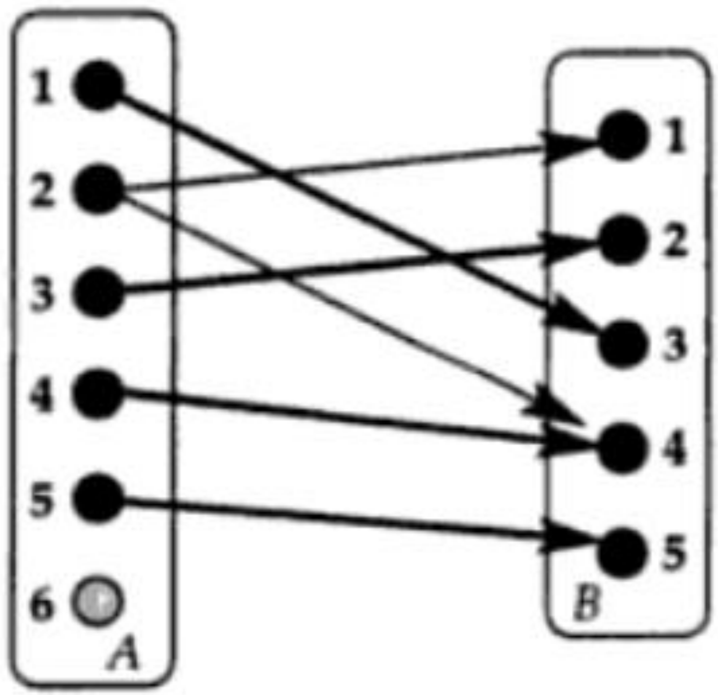
x	$g(x)$
-2	-15
-1	0
0	3
1	0
2	-3
3	0
4	15



função de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{x, y, z\}$



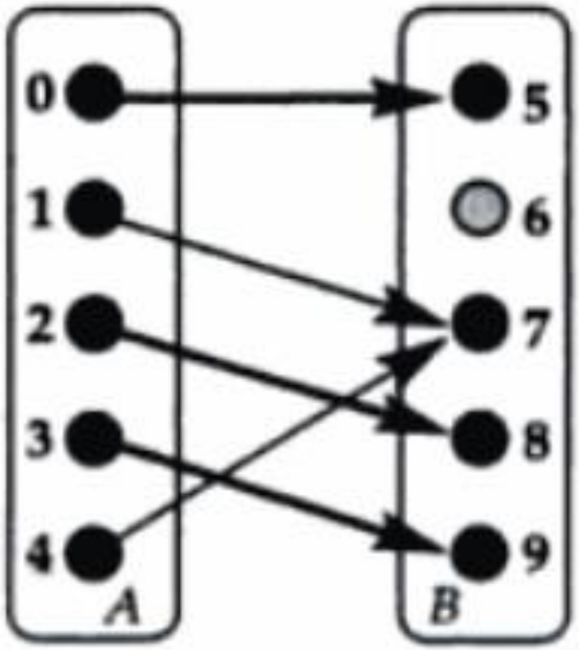
$$g = \{(1, 3), (2, 1), (2, 4)\ (3, 2), (4, 4), (5, 5)\}.$$



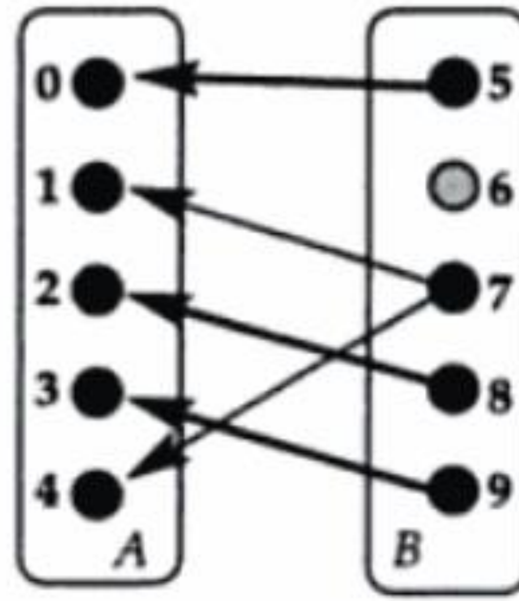
$$6 \in A \text{ mas } 6 \notin \operatorname{dom} g.$$

$(2, 1), (2, 4) \in g$, o que viola a Definição

Funções Inversas



relação R



R^{-1}

PERGUNTA:

Se f é uma função de A em B então f^{-1} será uma função de B em A?

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Seja $f: A \to B$

$$f = \{(0, 5), (1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 7)\}$$

f^{-1} não é função

$$f^{-1} = \{(5, 0), (7, 1), (8, 2), (9, 3), (7, 4)\}.$$

$(7, 1)$ como $(7, 4)$ estão em f^{-1}

$$\text{dom } f^{-1} = \{5, 7, 8, 9\}, \neq B$$

Função Injetora

- Uma função f é dita *um a um* ou *injetora* se dados $a,b \in Dom(f)$ então $f(a) \neq f(b)$.
- Equivalentemente, uma função f é dita um a um ou injetora se $f(a)=f(b)$ então $a=b$.

Proposição 1: Seja f uma função. A relação inversa f^{-1} é uma função se, e somente se, f é injetora.

Proposição 2: Sejam f e f^{-1} funções. Então $Dom(f)=Im(f^{-1})$ e $Im(f)=Dom(f^{-1})$.

Função Sobrejetora

Uma função $f:A\rightarrow B$ é dita *sobrejetora* se para todo $y\in B$ existe $x\in A$ tal que $f(x)=y$. Em outras palavras $Im(f)=B$.

Exemplo:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{7, 8, 9, 10\}$ e sejam

$$f = \{(1, 7), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 9), (6, 10)\} \text{ e}$$
$$g = \{(1, 7), (2, 7), (3, 7), (4, 9), (5, 9), (6, 10)\}.$$

$f : A \rightarrow B$ é sobre $\qquad g : A \rightarrow B$ não é sobre.

Obs.: Quando uma função é ***injetora*** e ***sobrejetora*** dizemos que esta função é ***bijetora***.

Seja a função $f:A \rightarrow B$ bijetora e A, B conjuntos finitos. Então o número de elementos de A é igual ao número de elementos de B (Notação: $n(A)=n(B)$).

Princípio da Casa de Pombo: Seja a função $f:A \rightarrow B$ com A e B conjuntos finitos.

(a) Se $n(A)>n(B)$ então f não é injetora.

(b) SE $n(A)<n(B)$ então f não é sobrejetora.