Exemplos (gradiente e derivada direcional)

Observação: Na derivada direcional vamos trabalhar com vetor unitário. Assim dado um vetor u qualquer, se u não for unitário basta considerarmos $\frac{u}{|u|}$.

8 Definição Se f é uma função de duas variáveis x e y, então o **gradiente** de f é a função vetorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

EXEMPLO 3 Se $f(x, y) = \text{sen}\, x + e^{xy}$, então

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

e

$$\nabla f(0, 1) = \langle 2, 0 \rangle$$

EXEMPLO 4 Determine a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(2, -1)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

SOLUÇÃO Primeiramente, vamos calcular o vetor gradiente em $(2, -1)$:

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2, -1) = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

Observe que $\mathbf{v}$ não é um vetor unitário, mas, como $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, o vetor unitário na direção de $\mathbf{v}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j}$$

Portanto, pela Equação 9, temos

$$D_{\mathbf{u}}f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u} = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j}\right)$$

$$= \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

Para uma função f de três variáveis, o **vetor gradiente**, denotado por ∇f ou **grad** f, é

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$

ou, de modo mais abreviado,

13
$$\boxed{\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}}$$

Então, como para as funções de duas variáveis, a Fórmula 12 para a derivada direcional pode ser reescrita como

14
$$\boxed{D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}}$$

Maximizando a Derivada Direcional

$\boxed{15}$ **Teorema** Suponha que f seja uma função diferenciável de duas ou três variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ é $|\nabla f(\mathbf{x})|$ ocorre quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção do vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

EXEMPLO 6

(a) Se $f(x, y) = xe^y$, determine a taxa de variação de f no ponto $P(2, 0)$ na direção de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

SOLUÇÃO

(a) Primeiro calcularemos o vetor gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e, xe^y \rangle$$

$$\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$$

O vetor unitário na direção $\overrightarrow{PQ} = \langle -1{,}5, 2 \rangle$ é $\mathbf{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$, logo a taxa de variação de f na direção que vai de P a Q é

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle$$

$$= 1(-\tfrac{3}{5}) + 2(\tfrac{4}{5}) = 1$$

(b) De acordo com o Teorema 15, f aumenta mais depressa na direção do gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$. A taxa máxima de variação é

$$|\nabla f(2, 0)| = |\langle 1, 2 \rangle| = \sqrt{5}$$

EXEMPLO 7 Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) do espaço seja dada por $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, onde T é medida em graus Celsius e x, y e z em metros. Em que direção no ponto $(1, 1, -2)$ a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de aumento?

SOLUÇÃO O gradiente de T é

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{i} - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{j} - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{k}$$

$$= \frac{160}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}(-x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} - 3z\,\mathbf{k})$$

No ponto $(1, 1, -2)$, o vetor gradiente é

$$\nabla T(1, 1, -2) = \tfrac{160}{256}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \tfrac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

Pelo Teorema 15, a temperatura aumenta mais rapidamente na direção do vetor gradiente $\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ ou, de forma equivalente, na direção de $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ou o vetor unitário $(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/\sqrt{41}$. A taxa máxima de aumento é o módulo do vetor gradiente

$$|\nabla T(1, 1, -2)| = \tfrac{5}{8}|-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}| = \tfrac{5}{8}\sqrt{41}$$

Portanto, a taxa máxima de aumento da temperatura é $\frac{5}{8}\sqrt{41} \approx 4°\text{C/m}$.

Importância do Vetor Gradiente

o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ dá a direção de um aumento mais rápido de f. Da mesma forma, pelas considerações semelhantes à nossa discussão

pode ser mostrado que $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular à curva de nível $f(x, y) = k$ que passa por P. Mais uma vez, isso é intuitivamente plausível porque os valores de f continuam constantes à medida que movemos ao longo da curva. (Veja a Figura 11.)