Problemas Complementares

Conjuntos e Subconjuntos

1.29 Quais dos seguintes conjuntos são iguais?

$A = \{x: x^2 - 4x + 3 = 0\}$, $C = \{x: x \in \mathbf{N}, x < 3\}$, $E = \{1, 2\}$, $G = \{3, 1\}$,

$B = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $D = \{x: x \in \mathbf{N}, x \text{ é ímpar}, x < 5\}$ $F = \{1, 2, 1\}$, $H = \{1, 1, 3\}$.

1.30 Liste os elementos dos conjuntos seguintes considerando o conjunto universo $U = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$. Identifique também os conjuntos iguais, se existirem.

$A = \{x : x \text{ é vogal}\}$ $C = \{x : x \text{ precede "f" no alfabeto}\}$

$B = \{x : x \text{ é uma letra na palavra "}little\text{"}\}$ $D = \{x : x \text{ é uma letra na palavra "}title\text{"}\}$

1.31 Seja $A = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$, $E = \{3, 5\}$.

(*a*) X e B são disjuntos. (*c*) $X \subseteq A$ mas $X \nsubseteq C$.

(*b*) $X \subseteq D$ mas $X \nsubseteq B$. (*d*) $X \subseteq C$ mas $X \nsubseteq A$.

Operações entre Conjuntos

Os Problemas 1.32 a 1.34 se referem aos conjuntos $U = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$ e $A = \{1, 2, 5, 6\}$, $B = \{2, 5, 7\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

1.32 Encontre: (*a*) $A \cap B$ e $A \cap C$; (*b*) $A \cup B$ e $B \cup C$; (*c*) A^c e C^c.

1.33 Encontre: (*a*) $A \setminus B$ e $A \setminus C$; (*b*) $A \oplus B$ e $A \oplus C$.

1.34 Encontre: (*a*) $(A \cup C) \setminus B$; (*b*) $(A \cup B)^c$; (*c*) $(B \oplus C) \setminus A$.

1.35 Sejam: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, d, f, g\}$, $C = \{b, c, e, g, h\}$, $D = \{d, e, f, g, h\}$.
Ache:

(*a*) $A \cup B$ (*d*) $A \cap (B \cup D)$ (*g*) $(A \cup D) \setminus C$ (*j*) $A \oplus B$

(*b*) $B \cap C$ (*e*) $B \setminus (C \cup D)$ (*h*) $B \cap C \cap D$ (*k*) $A \oplus C$

(*c*) $C \setminus D$ (*f*) $(A \cap D) \cup B$ (*i*) $(C \setminus A) \setminus D$ (*l*) $(A \oplus D) \setminus B$

1.36 Sejam A e B conjuntos quaisquer. Mostre:

(*a*) A é a união disjunta de $A \setminus B$ e $A \cap B$.

(*b*) $A \cup B$ é a união disjunta de $A \setminus B$, $A \cap B$ e $B \setminus A$.

1.37 Prove:

(*a*) $A \subseteq B$ se e somente se $A \cap B^c = \varnothing$.

(*b*) $A \subseteq B$ se e somente se $A^c \cup B = U$.

(*c*) $A \subseteq B$ se e somente se $B^c \subseteq A^c$.

(*d*) $A \subseteq B$ se e somente se $A \setminus B = \varnothing$.

(Compare os resultados com o Teorema 1.2.)

1.38 Prove as leis de absorção: (*a*) $A \cup (A \cap B) = A$; (*b*) $A \cap (A \cup B) = A$.

1.39 A fórmula $A \setminus B = A \cap B^c$ define a operação de diferença em termos da operação de interseção e de complementar. Ache uma fórmula que defina a união $A \cup B$ em termos da operação de interseção e de complementar.

Diagramas de Venn

1.40 O diagrama de Venn na Figura 1-17 apresenta os conjuntos A, B e C. Assinale os seguintes conjuntos: (*a*) $A \setminus (B \cup C)$; (*b*) $A^c \cap (B \cup C)$; (*c*) $A^c \cap (C \setminus B)$.

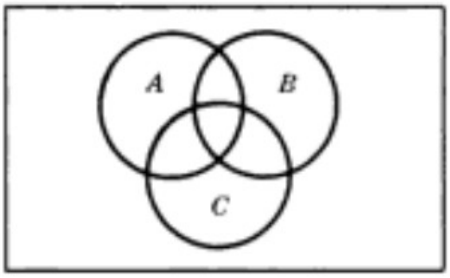

Fig. 1-17

1.41 Use o diagrama Venn da Fig. 1-6 e o Exemplo 1.6 para escrever cada um dos conjuntos como a união disjunta dos produtos fundamentais:

(*a*) $A \cap (B \cup C)$, (*b*) $A^c \cap (B \cup C)$, (*c*) $A \cup (B \setminus C)$.

1.42 Esboce um diagrama de Venn para os conjuntos A, B e C, onde $A \subseteq B$, os conjuntos B e C são disjuntos, mas A e C têm elementos em comum.

Álgebra de Conjuntos e Dualidade

1.43 Escreva a equação dual de cada uma das equações:

(*a*) $A \cup B = (B^c \cap A^c)^c$ (*b*) $A = (B^c \cap A) \cup (A \cap B)$

(*c*) $A \cup (A \cap B) = A$ (*d*) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) = U$

1.44 Use as leis da Tabela 1-1 para provar cada uma das identidades:

(*a*) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$, (*b*) $A \cup (A \cap B) = A$,

(*c*) $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$.

Conjuntos Finitos e o Princípio de Enumeração

1.45 Determine quais dos seguintes conjuntos são finitos.

(*a*) O conjunto das retas paralelas ao eixo x.

(*b*) O conjunto das letras do alfabeto.

(*c*) O conjunto dos números múltiplos de 5.

(*d*) O conjunto de animais que vivem na Terra.

(*e*) O conjunto de números que são soluções da equação $x^{27} + 26x^{18} - 17x^{11} + 7x^3 - 10 = 0$.

(*f*) O conjunto dos círculos contendo a origem (0, 0).

1.46 Use o Teorema 1.5 para provar o Corolário 1.6: se A, B e C são conjuntos finitos, então $A \cup B \cup C$ também é finito e

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

1.47 Foi realizada uma pesquisa com uma amostragem de 25 carros novos à venda em uma revendedora local para verificar quais dos três opcionais populares, ar-condicionado (A), rádio (R) e vidros elétricos (V), já estavam instalados. A pesquisa concluiu:

15 tinham ar-condicionado,
12 tinham rádio,

11 tinham vidros elétricos,
5 tinham ar-condicionado e vidros elétricos,
9 tinham ar-condicionado e rádio,
4 tinham rádio e vidros elétricos,
3 tinham as três opções.

Ache o número de carros que têm: (*a*) apenas vidros elétricos; (*b*) apenas ar-condicionado;(*c*) apenas rádio; (*d*) rádio e vidros elétricos, mas não ar-condicionado; (*e*) ar-condicionado e rádio, mas não vidros elétricos; (*f*) apenas uma das opções; (*h*) nenhuma das opções.

Classes de Conjuntos

1.48 Ache o conjunto das partes de A, Partes(A) = $\{1,2,3,4,5\}$.

1.49 Dado $A = [\{a,b\}, \{c\}, \{d,e,f\}]$.

(*a*) Determine se cada uma das afirmativas seguintes é verdadeira ou falsa:

$$(i)\ a \in A,\quad \text{(ii)}\ \{c\} \subseteq A,\quad \text{(iii)}\ \{d,e,f\} \in A,\quad \text{(iv)}\ \{\{a,b\}\} \subseteq A,\quad \text{(v)}\ \varnothing \subseteq A.$$

(*b*) Ache o conjunto das partes de A.

1.50 Suponha que A seja um conjunto finito e $n(A) = m$. Mostre que Partes(A) tem 2^m elementos.

Partições

1.51 Seja $X = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$. Determine se cada uma das seguintes classes é ou não uma partição de X.

(*a*) $[\{1,3,6\}, \{2,8\}, \{5,7,9\}]$
(*b*) $[\{1,5,7\}, \{2,4,8,9\}, \{3,5,6\}]$
(*c*) $[\{2,4,5,8\}, \{1,9\}, \{3,6,7\}]$
(*d*) $[\{1,2,7\}, \{3,5\}, \{4,6,8,9\}, \{3,5\}]$

1.52 Seja $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determine se cada uma das seguintes classes é ou não uma partição de S.

(*a*) $P_1 = [\{1,2,3\}, \{1,4,5,6\}]$
(*b*) $P_2 = [\{1,2\}, \{3,5,6\}]$
(*c*) $P_3 = [\{1,3,5\}, \{2,4\}, \{6\}]$
(*d*) $P_4 = [\{1,3,5\}, \{2,4,6,7\}]$

1.53 Determine se cada uma das seguintes classes é ou não uma partição do conjunto de inteiros positivos N.

(*a*) $[\{n\colon n > 5\}, \{n\colon n < 5\}]$ (*b*) $[\{n\colon n > 5\}, \{0\}, \{1,2,3,4,5\}]$, (*c*) $[\{n\colon n^2 > 11\}, \{n\colon n^2 < 11\}]$