Polinômios e fatoração

Adição, subtração e multiplicação de polinômios

Um **polinômio em x** é qualquer expressão que pode ser escrita na forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro não negativo e $a_n \neq 0$. Os números $a_{n-1}, \ldots,$ a_1, a_0 são números reais chamados **coeficientes**. O **grau do polinômio** é n e o **coeficiente principal** é o número real a_n.

Adição e Subtração de Polinônios

(a) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) + (x^3 + 2x^2 - 5x + 3)$

(b) $(4x^2 + 3x - 4) - (2x^3 + x^2 - x + 2)$

SOLUÇÃO

(a) $$(2x^3 + x^3) + (-3x^2 + 2x^2) + (4x + (-5x)) + (-1 + 3)$$
$$= 3x^3 - x^2 - x + 2$$

(b) $$(0 - 2x^3) + (4x^2 - x^2) + (3x - (-x)) + (-4 - 2)$$
$$= -2x^3 + 3x^2 + 4x - 6$$

adicionamos ou subtraímos *termos semelhantes* usando a propriedade distributiva.

Para **expandir o produto** de dois polinômios, nós usamos a propriedade distributiva.

$$(3x + 2)(4x - 5) = 3x(4x - 5) + 2(4x - 5)$$

$$= (3x)(4x) - (3x)(5) + (2)(4x) - (2)(5)$$

$$= \underbrace{12x^2}_{\text{produto dos primeiros termos}} - \underbrace{15x}_{\text{produto dos termos externos}} + \underbrace{8x}_{\text{produto dos termos internos}} - \underbrace{10}_{\text{produto dos últimos termos}}$$

$$= 12x^2 - 7x - 10$$

Multiplicação de polinômios na forma vertical

Escreva $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)$ na forma-padrão.

SOLUÇÃO

$$
\begin{array}{r}
x^2 - 4x + 3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
x^2 + 4x + 5 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
x^4 - 4x^3 + 3x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
4x^3 - 16x^2 + 12x \qquad\qquad \\
5x^2 - 20x + 15 \\
\hline
x^4 + 0x^3 - 8x^2 - 8x + 15 \qquad
\end{array}
$$

Assim, $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5) = x^4 - 8x^2 - 8x + 15$

Produtos notáveis

Alguns produtos notáveis

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas.

1. **Produto de uma soma e uma diferença:** $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$
2. **Quadrado de uma soma de dois termos:** $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$
3. **Quadrado de uma diferença de dois termos:** $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$
4. **Cubo de uma soma de dois termos:** $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$
5. **Cubo de uma diferença de dois termos:** $(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$

EXEMPLOS????

Fatoração de polinômios usando produtos notáveis

Um polinômio está **fatorado completamente** se estiver escrito como um produto de seus fatores irredutíveis.

$$2x^2 + 7x - 4 = (2x - 1)(x + 4)$$

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$$

$$x^3 - 9x = x(x - 3)(x + 3).$$

Colocação dos fatores comuns em evidencia

(a) $2x^3 + 2x^2 - 6x = 2x(x^2 + x - 3)$

(b) $u^3v + uv^3 = uv(u^2 + v^2)$

Fatoração da diferença de dois quadrados

(a)
$$\begin{aligned} 25x^2 - 36 &= (5x)^2 - 6^2 \\ &= (5x + 6)(5x - 6) \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 4x^2 - (y + 3)^2 &= (2x)^2 - (y + 3)^2 \\ &= [2x + (y + 3)][2x - (y + 3)] \\ &= (2x + y + 3)(2x - y - 3) \end{aligned}$$

Fatoração de trinomios quadrados perfeitos

(a) $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2(3x)(1) + 1^2$

$$= (3x + 1)^2$$

(b) $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2$

$$= (2x - 3y)^2$$

a soma e a diferença de dois cubos

Mesmos sinais

$$u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$$

Sinais opostos

Mesmos sinais

$$u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$$

Sinais opostos

Fatoração da soma e diferença de dois cubos

(a) $x^3 - 64 = x^3 - 4^3$

$$= (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

(b) $8x^3 + 27 \quad = (2x)^3 + 3^3$

$$= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$$

Fatoração de trinômios

Fatorar o trinômio $ax^2 + bx + c$ como um produto de binômios

$$\overbrace{}^{\text{Fatores de } a}$$

$$ax^2 + bx + c = (\square x + \square)(\square x + \square)$$

$$\underbrace{}_{\text{Fatores de } c}$$

Pelo fato de o número de fatores de a e c ser finito, podemos listar todos os possíveis fatores binomiais, isto é, os possíveis fatores formados pela soma de dois monômios. Então, iniciamos checando cada possibilidade até encontrarmos um par que funcione (se nenhum par funciona, então o trinômio é irredutível), como no Exemplo 8.

Fatoração de um trinomio com coeficiente principal igual a 1

Fatore $x^2 + 5x - 14$.

SOLUÇÃO

par de fatores do coeficiente principal é 1 e 1

pares de fatores de 14 são 1 e 14 também 2 e 7

as quatro possíveis fatorações do trinômio:

$(x + 1)(x - 14)$ $\quad$ $(x - 1)(x + 14)$

$(x + 2)(x - 7)$ $\quad$ $(x - 2)(x + 7)$

correto

$$\boxed{x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)}$$

Fatore $35x^2 - x - 12$.

SOLUÇÃO

pares de fatores do coeficiente principal são 1 e 35, como também 5 e 7

de 12 são 1 e 12, 2 e 6, como também 3 e 4

fatorações precisam ser da forma:

$$(x - *)(35x + ?) \qquad (x + *)(35x - ?)$$

$$(5x - *)(7x + ?) \qquad (5x + *)(7x - ?)$$

um total de 24 possibilidades

Se você tentar, mental e sistematicamente, deverá encontrar que

$$\boxed{35x^2 - x - 12 = (5x - 3)(7x + 4)}$$

Para fatorar o trinômio, uma outra opção é utilizar o seguinte resultado:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

com x_1 e x_2 soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$

?????

Fatoração de trinomios em x e y

Fatore $3x^2 - 7xy + 2y^2$.

SOLUCÃO

obter $-7xy$ como o termo central

$$3x^2 - 7xy + 2y^2 = (3x - ?y)(x - ?y)$$

Conferindo as duas possibilidades,

$$(3x - y)(x - 2y) \text{ e } (3x - 2y)(x - y)$$

$$\boxed{3x^2 - 7xy + 2y^2 = (3x - y)(x - 2y)}$$

Fatoração por agrupamento

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

(a) $3x^3 + x^2 - 6x - 2$

$$= (3x^3 + x^2) - (6x + 2)$$
$$= x^2(3x + 1) - 2(3x + 1)$$
$$= (3x + 1)(x^2 - 2)$$

(b) $2ac - 2ad + bc - bd$

$$= (2ac - 2ad) + (bc - bd)$$
$$= 2a(c - d) + b(c - d)$$
$$= (c - d)(2a + b)$$

Algumas fórmulas importantes de álgebra

Potências

Se todas as bases são diferentes de zero:

$$u^m u^n = u^{m+n}$$

$$\frac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$$

$$u^0 = 1$$

$$u^{-n} = \frac{1}{u^n}$$

$$(uv)^m = u^m v^m$$

$$(u^m)^n = u^{mn}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)^m = \frac{u^m}{v^m}$$

Radicais e expoentes racionais

Se todas as raízes são números reais:

$$\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v}$$

$$\sqrt[n]{\frac{u}{v}} = \frac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}} \; (v \neq 0)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[mn]{u}$$

$$(\sqrt[n]{u})^n = u$$

$$\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m$$

$$\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u| & n \text{ par} \\ u & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}$$

$$u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m$$

$$u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}$$

Produtos notáveis e fatoração de polinômios

$$(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$$

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

$$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

$$(u + v)(u^2 - uv + v^2) = u^3 + v^3$$

$$(u - v)(u^2 + uv + v^2) = u^3 - v^3$$