Consequência Lógica

- Quando podemos dizer que uma fórmula é consequência de outra fórmula ou de um conjunto de fórmulas?

Resposta:

No caso da lógica proposicional clássica, a resposta é dada em termos de valorações.

Definição 1:

Dizemos que uma fórmula B é **consequência lógica** de outra fórmula A, se toda **valoração v** que **satisfaz A** também **satisfaz B**.

Representação:

$$A \models B.$$

Exemplo 3: Verifique se $(p \vee q) \rightarrow r \models p \rightarrow r$.

Solução:

Linha	p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
1	**0**	**0**	0	0	**1**	**1**
2	**0**	**0**	1	0	**1**	**1**
3	0	1	0	1	0	1
4	**0**	**1**	1	1	**1**	**1**
5	1	0	0	1	0	0
6	**1**	**0**	1	1	**1**	**1**
7	1	1	0	1	0	0
8	**1**	**1**	1	1	**1**	**1**

Exemplo 4: Verifique se $(p \wedge q) \rightarrow r \models p \rightarrow r$.

Solução: Pela tabela abaixo concluímos $(p \wedge q) \rightarrow r \not\models p \rightarrow r$ **(veja a linha 5).**

Linha	p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1	1
3	0	1	0	0	1	1
4	0	1	1	0	1	1
5	**1**	**0**	**0**	0	**1**	**0**
6	1	0	1	0	1	1
7	1	1	0	1	0	0
8	1	1	1	1	1	1

Além da consequência lógica entre duas fórmulas, podemos estudar **quando uma fórmula A é consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ**. Um conjunto de fórmulas é chamado de teoria.

- *Dizemos que uma fórmula A é consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ,* ***representado por $\Gamma \models A$****, se toda valoração v que satisfaz a todas as fórmulas de Γ também satisfaz A.*

- Se $\Gamma=\{\alpha, \beta, \gamma, \theta\}$, no lugar de **$\Gamma \models$ A**, é usual representarmos por **$\alpha, \beta, \gamma, \theta \models$ A.**

- ***Note que se $\Gamma=\varnothing$ representamos $\Gamma \models A$ por $\models A$. Neste caso, $\models A$ significa que A é uma tautologia.***

Exemplo 4:

Verificar a validade da regra lógica conhecida como *modus ponens*, ou seja, p, $p \to q \models q$.

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	**1**	**1**

A única linha que satisfaz simultaneamente p e $p \to q$ é a última, e neste caso temos também que q é satisfeita.

- Qual a relação entre a consequência lógica ($\models$) e o conectivo booleano ($\rightarrow$) ?

<u>Teorema da Dedução</u>:

Sejam Γ um conjunto de fórmulas e A e B fórmulas. Então,

$$\Gamma, A \models B \quad \textbf{se, e somente se,} \quad \Gamma \models A \rightarrow B.$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se Γ, A $\models$ B, então $\Gamma \models A \to B$.

Pois bem, considere uma valoração v que satisfaz Γ (notação: $v(\Gamma)=1$).

(a) Se $v(A)=1$, então $v(B)=1$, pois $\Gamma, A \models B$. Logo, $v(A \to B)=1$.

(b) Se $v(A)=0$, é claro que $v(A \to B)=1$.

($\Leftarrow$) Se $\Gamma \models A \rightarrow B$, então $\Gamma, A \models B$.

Considere uma valoração v qualquer tal que $v(\Gamma)=1$ e $v(A)=1$. Assuma, por contradição, que $v(B)=0$. Nesse caso, temos que $v(A \rightarrow B)=0$ o que contradiz $\Gamma \models A \rightarrow B$. Logo, $v(B)=1$, e assim, provamos $\Gamma, A \models B$ como desejado.

Equivalência lógica entre duas fórmulas

Definição 2: Duas fórmulas A e B são logicamente equivalentes se as valorações que satisfazem A são exatamente as mesmas valorações que satisfazem B.

Representação: $\mathbf{A \equiv B}$.

Em outras palavras, $\mathbf{A \equiv B}$ se $\mathbf{A \models B}$ e $\mathbf{B \models A}$.

Exemplo 5: Verificar que $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$.

Solução:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$
0	0	**1**	**1**	1	**1**
0	1	**1**	**0**	1	**1**
1	0	**0**	**1**	0	**0**
1	1	**0**	**0**	1	**1**

Note que as colunas para $p \to q$ e para $\sim q \to \sim p$ são idênticas, i.e, $p \to q \models \sim q \to \sim p$ e $\sim q \to \sim p \models p \to q$.

A implicação $\sim q \to \sim p$ é dita a contrapositiva da implicação $p \to q$.

Equivalências notáveis

(a) $\sim\sim p \equiv p$ (eliminação da dupla negação)

(b) $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ (def. $\rightarrow$ em termos de $\sim$ e $\vee$)

(c) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ (lei de De Morgan 1)

(d) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (lei de De Morgan 2)

(e) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributividade)

(f) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributividade)

Ao definirmos a linguagem da lógica proposicional, apresentamos três símbolos binários: $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$. Na realidade, precisamos apenas de um deles e da negação para definir os outros dois. De fato, note que:

$$\mathbf{A \vee B \equiv \sim(\sim A \wedge \sim B), \quad A \rightarrow B \equiv \sim(A \wedge \sim B)}$$

$$\mathbf{A \wedge B \equiv \sim(\sim A \vee \sim B), \quad A \rightarrow B \equiv A \vee \sim B)}$$

Teorema:

$A \equiv B$ see $A \leftrightarrow B$ é uma fórmula válida.