Capítulo 42

OS PRINCÍPIOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. INTRODUÇÃO

10... 9... 8... 7... 6... 5... 4... 3... 2... 1... 0... fogo!

Você já percebeu o quanto é necessário contar em nosso dia-a-dia? Contamos os dias que faltam para as férias, as páginas de um livro, os habitantes de uma região, etc.

Há, entretanto, algumas quantidades que gostaríamos de contar, mas nos deparamos com certas dificuldades. Quantas placas de automóvel podem ser confeccionadas com as 26 letras e os dez algarismos disponíveis? Quantos números de telefone podem ser formados? Quantas pessoas assistiram ao *show* de *rock* na praça?

Esses e muitos outros problemas nós vamos estudar agora, na análise combinatória, cuja principal finalidade é estabelecer métodos de contagem.

2. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DE CONTAGEM

Consideremos o seguinte problema: lançando simultaneamente um dado e uma moeda, quantos são os possíveis resultados?

Para efetuar a contagem, vamos apresentar os possíveis resultados no dado, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, e os possíveis resultados na moeda, C (cara) e K (coroa), conforme disposição a seguir:

Moeda / Dado	C	K
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Vamos agora construir a matriz formada por todos os pares (x, y), onde x é um dos resultados no dado e y é um dos resultados na moeda:

$$\begin{array}{c|c}
\text{Moeda / Dado} & \begin{array}{cc} C & K \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
(1, C) & (1, K) \\
(2, C) & (2, K) \\
(3, C) & (3, K) \\
(4, C) & (4, K) \\
(5, C) & (5, K) \\
(6, C) & (6, K)
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Note que a tabela assim construída apresenta todos os possíveis resultados do experimento. Assim, o número de elementos dessa matriz é igual ao número de resultados possíveis do experimento. Como a matriz possui seis linhas por duas colunas, temos que o número de elementos que a compõem é:

$$\underbrace{6}_{\substack{\textbf{Número de}\\ \textbf{resultados}\\ \textbf{possíveis no dado}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\textbf{Número de}\\ \textbf{resultados}\\ \textbf{possíveis na moeda}}} = 12$$

Consideremos, agora, um outro problema: lançando-se um dado, uma moeda e retirando-se uma etiqueta de uma urna que contém quatro etiquetas de cores diferentes, azul (A), vermelha (V), preta (P) e branca (B), quantos são os possíveis resultados?

Observe que temos um experimento composto de três experimentos: lançar o dado, lançar a moeda e retirar uma etiqueta da urna. Será possível construir a matriz das possibilidades, isto é, a tabela formada por todos os possíveis resultados?

É perfeitamente possível, bastando para isso associarmos os dois primeiros experimentos e apresentarmos os resultados conforme disposição a seguir:

$$\begin{array}{c|c}
\text{Etiqueta / Dado e moeda} & \begin{array}{cccc} A & V & P & B \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} 1, C \\ 1, K \\ 2, C \\ 2, K \\ 3, C \\ 3, K \\ 4, C \\ 4, K \\ 5, C \\ 5, K \\ 6, C \\ 6, K \end{array} &
\begin{bmatrix}
(1, C, A) & (1, C, V) & (1, C, P) & (1, C, B) \\
(1, K, A) & (1, K, V) & (1, K, P) & (1, K, B) \\
(2, C, A) & (2, C, V) & (2, C, P) & (2, C, B) \\
(2, K, A) & (2, K, V) & (2, K, P) & (2, K, B) \\
(3, C, A) & (3, C, V) & (3, C, P) & (3, C, B) \\
(3, K, A) & (3, K, V) & (3, K, P) & (3, K, B) \\
(4, C, A) & (4, C, V) & (4, C, P) & (4, C, B) \\
(4, K, A) & (4, K, V) & (4, K, P) & (4, K, B) \\
(5, C, A) & (5, C, V) & (5, C, P) & (5, C, B) \\
(5, K, A) & (5, K, V) & (5, K, P) & (5, K, B) \\
(6, C, A) & (6, C, V) & (6, C, P) & (6, C, B) \\
(6, K, A) & (6, K, V) & (6, K, P) & (6, K, B)
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Como a matriz formada por todos os resultados possíveis (face no dado, face na moeda, cor da etiqueta) apresenta doze linhas por quatro colunas, temos que o número possível de resultados do experimento é $12 \cdot 4 = 48$, ou seja:

$$\underbrace{6}_{\substack{\textbf{Número de}\\ \textbf{resultados}\\ \textbf{possíveis no dado}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\textbf{Número de}\\ \textbf{resultados possíveis}\\ \textbf{na moeda}}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{\textbf{Número de}\\ \textbf{resultados}\\ \textbf{possíveis na urna}}} = 48$$

Tendo como motivação os dois exemplos anteriores, vamos enunciar o seguinte princípio, conhecido por **princípio fundamental de contagem**:

> Se um experimento A apresenta n resultados distintos e um experimento B apresenta k resultados distintos, então o experimento composto de A e B, nessa ordem, apresenta nk resultados distintos.

Esse princípio pode ser generalizado para mais de dois experimentos, da seguinte maneira:

> Se os experimentos $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ apresentam como números de resultados possíveis $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$, respectivamente, então o experimento composto de $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$, nessa ordem, apresenta $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k$ resultados possíveis.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Uma montadora de automóveis apresenta um carro em quatro modelos diferentes e em cinco cores diferentes. Um consumidor que quiser adquirir esse veículo terá quantas opções de escolha?

Resolução

Consideremos o seguinte diagrama:

Modelo	Cor

Para a primeira "casa", temos quatro possibilidades de escolha e, para a segunda, cinco possibilidades:

Os números de possibilidades →

$$\underbrace{\boxed{\text{Modelo}}}_{4}\ \underbrace{\boxed{\text{Cor}}}_{5}$$

Pelo princípio fundamental de contagem, o consumidor terá $4 \cdot 5 = 20$ opções de escolha.

R.2 Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 6, 8 e 9?

Resolução

Devemos preencher com um algarismo cada uma das casas do diagrama:

Centenas	Dezenas	Unidades

O número de possibilidades para cada casa é cinco:

Os números de possibilidades →

$$\underbrace{\boxed{}}_{5}\ \underbrace{\boxed{}}_{5}\ \underbrace{\boxed{}}_{5}$$

Assim, estamos realizando o seguinte experimento: preencher a primeira casa, preencher a segunda casa e preencher a terceira casa. Pelo princípio fundamental de contagem, temos que o total de números que podem ser formados é $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

R.3 Quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 6, 8 e 9?

Resolução

Devemos preencher, sem repetir algarismos, cada uma das casas do diagrama:

Centenas	Dezenas	Unidades

O número de possibilidades para a primeira casa é cinco:

$$\underbrace{\boxed{}}_{5}\ \boxed{}\ \boxed{}$$

O número de possibilidades para a segunda casa é quatro, pois um algarismo já foi usado para preencher a primeira casa e não pode ser repetido na segunda casa:

$$\underbrace{\boxed{}}_{5}\ \underbrace{\boxed{}}_{4}\ \boxed{}$$

O número de possibilidades para a última casa é três, pois os dois algarismos que já foram usados nas casas anteriores não podem ser repetidos:

$$\underbrace{\boxed{}}_{5}\ \underbrace{\boxed{}}_{4}\ \underbrace{\boxed{}}_{3}$$

Pelo princípio fundamental de contagem, temos que o total de números que podem ser formados é:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

R.4 Quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 6 e 8?

Resolução

Observe que o algarismo 0 (zero) não pode ocupar a casa das centenas no diagrama abaixo, caso contrário o número não teria três algarismos:

Centenas	Dezenas	Unidades

Assim sendo, o número de possibilidades para a primeira casa é quatro, porque excluímos o zero:

$$\underbrace{\boxed{}}_{4}\ \boxed{}\ \boxed{}$$

O número de possibilidades para a segunda casa é quatro, porque o algarismo zero pode ocupar essa casa:

$$\underbrace{\boxed{}}_{4}\ \underbrace{\boxed{}}_{4}\ \boxed{}$$

O número de possibilidades para a última casa é três:

$$\underbrace{\boxed{}}_{4}\ \underbrace{\boxed{}}_{4}\ \underbrace{\boxed{}}_{3}$$

Pelo princípio fundamental de contagem, temos que o total de números que podem ser formados é:

$$4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$$

R.5 Quantos divisores naturais possui o número 72?

Resolução

Temos que $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Os divisores de 72 são do tipo $2^x \cdot 3^y$, onde $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$. Assim, o total de divisores de 72 é igual ao número de pares ordenados (x, y) que podem ser formados de modo que $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$. Pelo princípio fundamental de contagem, temos:

$$\begin{array}{lc} & (x,\ y) \\ & \downarrow \quad \downarrow \\ \textbf{Os números de possibilidades} \longrightarrow & 4 \cdot 3 = 12 \end{array}$$

Logo, o número 72 possui doze divisores naturais.

R.6 Quantos subconjuntos possui o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$?

Resolução

Vejamos de quantas maneiras diferentes podemos formar um subconjunto S de A.

Para cada elemento de A temos duas possibilidades: ou o elemento pertence a S ou não pertence a S. Isto é:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \swarrow \textbf{ ou } \searrow & \swarrow \textbf{ ou } \searrow & \swarrow \textbf{ ou } \searrow & \swarrow \textbf{ ou } \searrow \\ \in S \quad \notin S & \in S \quad \notin S & \in S \quad \notin S & \in S \quad \notin S \end{array}$$

Assim, o número de subconjuntos de A pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem:

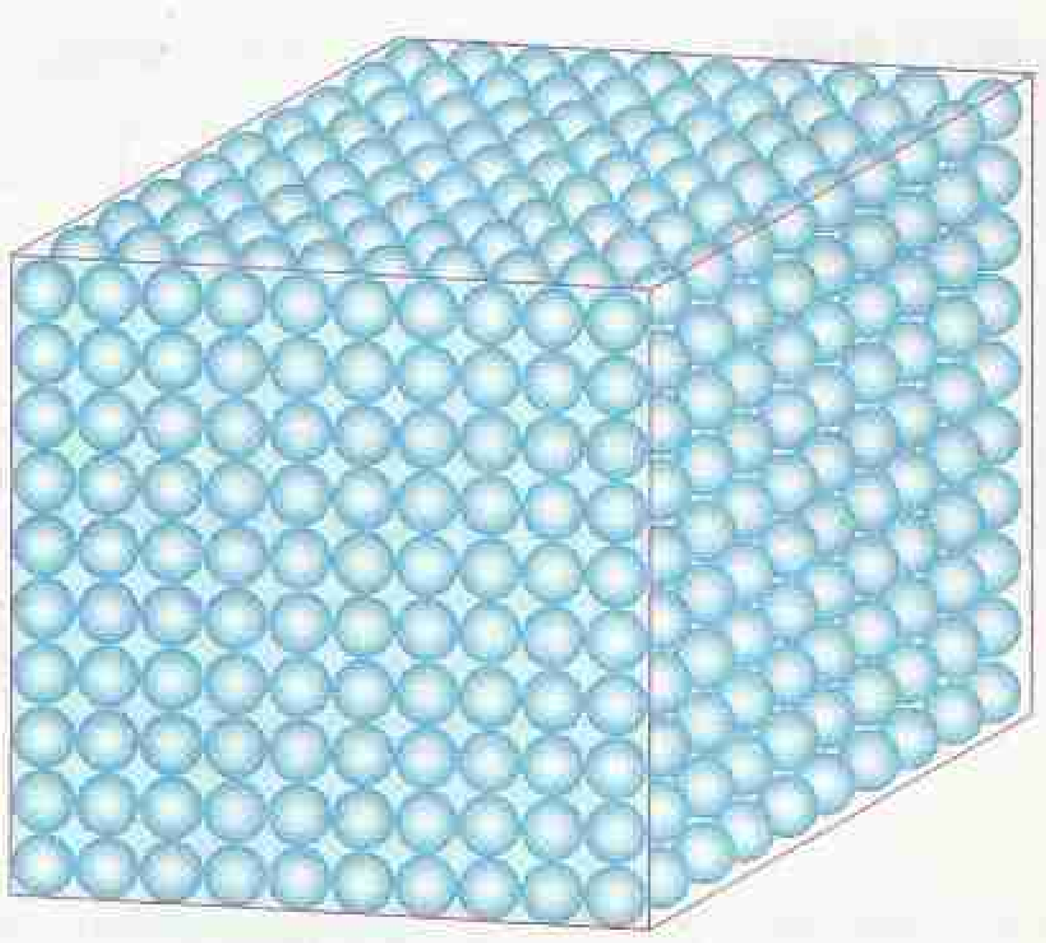
$$\begin{array}{lccccccc} & a & & b & & c & & d \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \textbf{Os números de possibilidades} \longrightarrow & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 = 2^4 = 16 \end{array}$$

Logo, o conjunto A possui dezesseis subconjuntos.

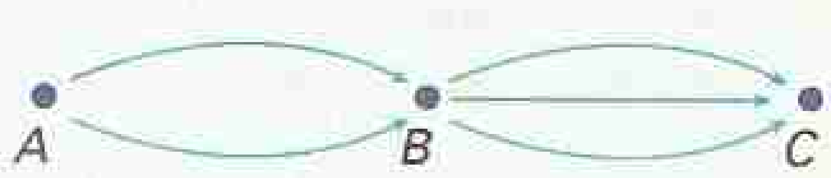
EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 (Enem) Uma pessoa arrumou bolinhas de 1 cm de diâmetro em camadas superpostas iguais em uma caixa cúbica de 10 cm de aresta, tendo assim empregado:

a) 100 bolinhas.
b) 300 bolinhas.
c) 1.000 bolinhas.
d) 2.000 bolinhas.
e) 10.000 bolinhas.



B.2 Duas linhas de ônibus vão de uma cidade A para uma cidade B e três linhas vão da cidade B para outra cidade C. De quantos modos diferentes um usuário dessas linhas pode ir de A para C, passando por B?

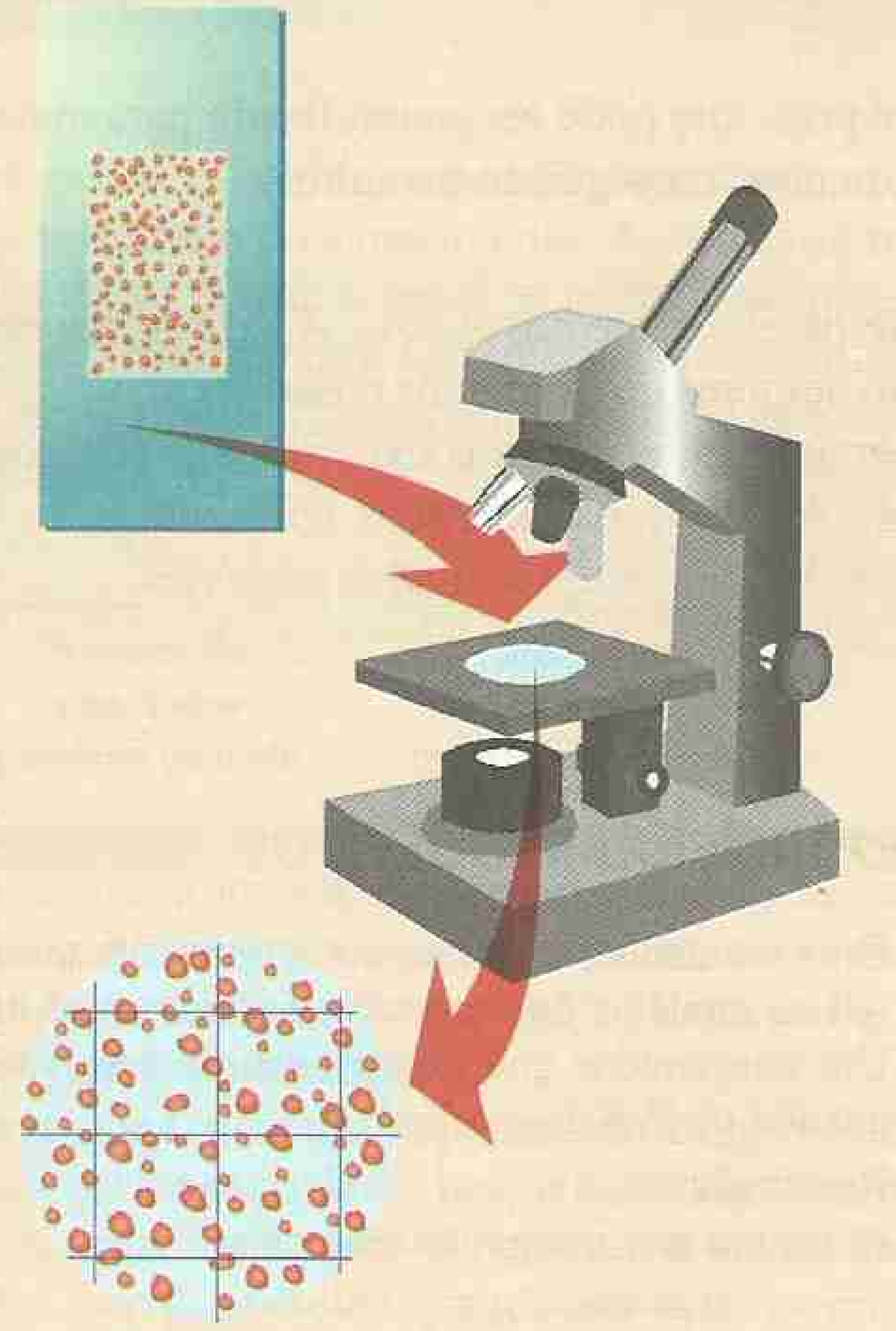


Sugestão. Esse experimento é composto de dois outros: 1º, de A para B; 2º, de B para C. Represente por um quadrinho cada um desses dois experimentos:

1º experimento	2º experimento

Contagem dos glóbulos vermelhos do sangue

Um exame muito freqüente em laboratórios clínicos é a contagem de glóbulos vermelhos do sangue. Um homem adulto sadio tem de 4.500.000 a 6.000.000 dessas células em cada mm³ de sangue, e uma mulher tem de 4.000.000 a 5.400.000.



Modernos aparelhos eletrônicos fazem a contagem dos glóbulos vermelhos em uma amostra de sangue. Essa contagem também pode ser feita através de um microscópio, conforme o processo descrito a seguir.

O sangue é diluído em uma proporção conhecida, reduzindo muito o número de células por mm³, e colocado num pequeno recipiente de vidro sob a forma de um paralelepípedo com fundo quadriculado. Em alguns quadradinhos desse quadriculado conta-se a quantidade de glóbulos vermelhos, calculando-se, a seguir, o número médio de glóbulos por quadradinho. Através da proporção de diluição obtém-se o número de glóbulos vermelhos por mm³.

B.3 (Cesgranrio) Durante um campeonato mundial de futebol, disputado por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda). Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

a) 69
b) 2.024
c) 9.562
d) 12.144

B.4 (UFES) Um *shopping center* possui 4 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do *shopping center* pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?

a) 12
b) 17
c) 19
d) 23
e) 60

B.5 (Faap-SP) Uma linha ferroviária tem 16 estações. Quantos tipos de bilhetes devem ser impressos, se cada bilhete deve registrar a estação de origem e a de destino?

a) 240
b) 256
c) 64
d) 272
e) 128


CID

B.6 Quantos números naturais de quatro algarismos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

B.7 Quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

B.8 Quantos números naturais de cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

B.9 (UFBA) Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 6 e 8, podem-se formar x números ímpares, com três algarismos distintos cada um. Determine x.

B.10 Qual o número de divisores naturais de $n = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$?

Exercícios complementares de C.1 a C.10

3. PRINCÍPIO ADITIVO DE CONTAGEM

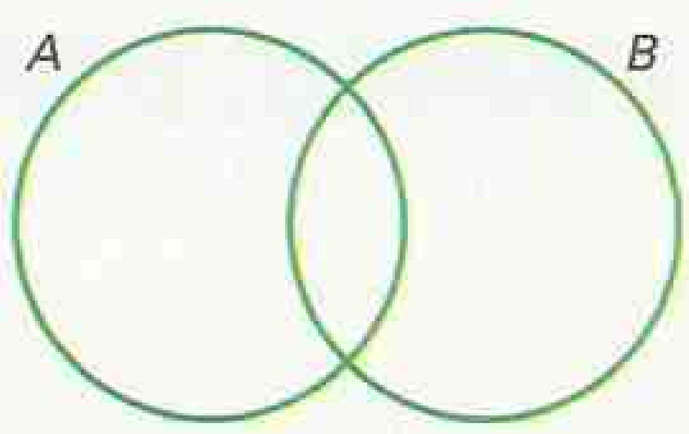
Teorema

Sendo A e B conjuntos finitos, o número de elementos da união de A e B é dado por:

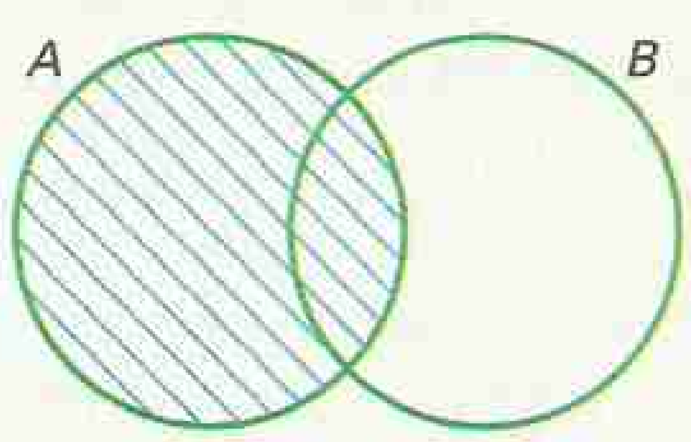
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

em que o símbolo $\boldsymbol{n}(\quad)$ representa o número de elementos do conjunto indicado entre parênteses.

Vamos interpretar esse teorema através do seguinte diagrama:

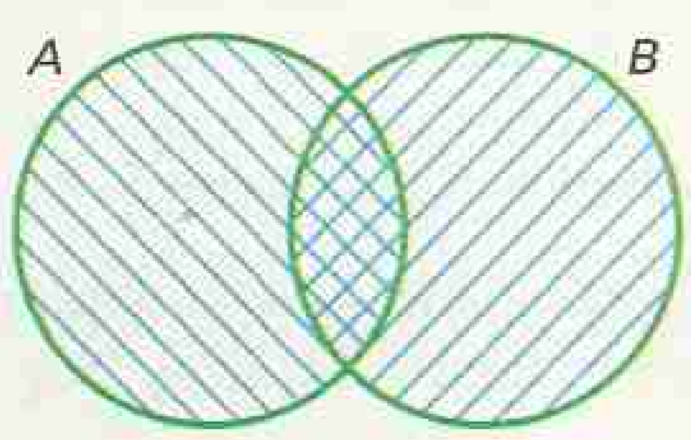


Para contar os elementos de $A \cup B$, vamos inicialmente contar os elementos de A:



A região hachurada representa os elementos que já foram contados.

Agora, vamos contar os elementos de B:

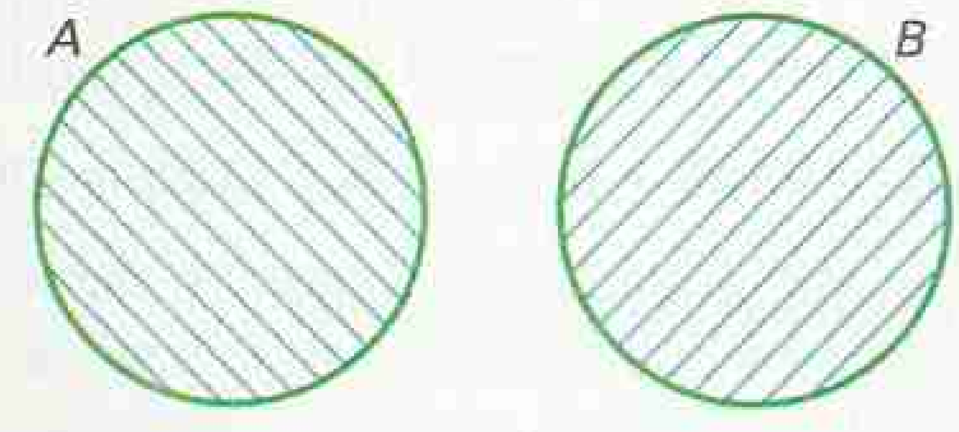


Note que os elementos da intersecção foram contados **duas vezes**. Para corrigir esse "erro" devemos subtrair dessa contagem o número de elementos da intersecção $A \cap B$, isto é:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Nota

Se os conjuntos A e B forem **disjuntos**, isto é, $A \cap B = \varnothing$:



então:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.7 O professor de português pediu que os alunos de uma classe lessem pelo menos uma das obras, *Dom Casmurro* ou *O alienista*, de Machado de Assis. Após algum tempo o professor constatou que:

1º) cada aluno havia lido pelo menos uma das obras;
2º) 22 alunos leram *Dom Casmurro*;
3º) 18 alunos, *O alienista*;
4º) 10 alunos, as duas obras.

Quantos alunos há nessa classe?


BIBLIOTECA NACIONAL, RJ

Joaquim Maria Machado de Assis (1839-1908).

Resolução

Sendo:

- A o conjunto dos alunos que leram *Dom Casmurro*, tem-se que $n(A) = 22$;
- B o conjunto dos alunos que leram *O alienista*, tem-se que $n(B) = 18$;
- $A \cap B$ o conjunto dos alunos que leram *Dom Casmurro* e *O alienista*, tem-se que $n(A \cap B) = 10$.

O conjunto $A \cup B$ é definido por

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \textbf{ ou } x \in B\}$$

O número de alunos que leram *Dom Casmurro* ou *O alienista* é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$\therefore n(A \cup B) = 22 + 18 - 10 = 30$$

Logo, a classe é formada por 30 alunos.

R.8 Durante um exame médico, foram medidas as estaturas dos alunos de uma classe. Observou-se que dezenove alunos têm estatura até 1,70 m e dez alunos têm estatura maior do que 1,70 m. Quantos alunos havia na classe?

Resolução

Sejam:

- A o conjunto dos alunos de até 1,70 m de estatura;
- B o conjunto dos alunos com mais de 1,70 m de estatura.

Note que A e B são disjuntos, isto é, $A \cap B = \varnothing$.

O número de alunos da classe é o número de elementos do conjunto $A \cup B$. Como A e B são disjuntos, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \therefore n(A \cup B) = 19 + 10 = 29$$

Logo, na classe havia 29 alunos.

R.9 Quantos números naturais de quatro ou cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Resolução

Seja A o conjunto dos números naturais de quatro algarismos distintos formados por 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Calculando $n(A)$:

$$n(A) = \underbrace{\boxed{}}_{6} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{5} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{4} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{3} \therefore n(A) = 360$$

Seja B o conjunto dos números naturais de cinco algarismos distintos formados por 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Calculando $n(B)$:

$$n(B) = \underbrace{\boxed{}}_{6} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{5} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{4} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{3} \cdot \underbrace{\boxed{}}_{2}$$

$$\therefore n(B) = 720$$

O problema pede o número de elementos que pertencem a A **ou** a B, isto é, $n(A \cup B)$. Como A e B são disjuntos, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$
$$\therefore n(A \cup B) = 360 + 720 = 1.080$$

Assim, podem ser formados 1.080 números.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.11 Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 200 \leq x \leq 450\}$ e $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 100 \leq y \leq 300\}$, calcule $n(A \cup B)$.

B.12 (Mackenzie-SP) Os conjuntos M e N são finitos. Sabe-se que $n(M \cup N) = 38$, $n(M \cap N) = 12$ e $n(M) = 35$; então $n(N)$ vale:

a) 23 b) 15 c) 3 d) 26 e) 50

B.13 A e B são conjuntos disjuntos tais que $n(A \cup B) = 25$ e $n(A) = 10$. Calcule $n(B)$.

B.14 Quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 5, 6 e 7 de modo que o algarismo das unidades seja menor que 4 ou maior que 5?

B.15 Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de três algarismos podem ser formados de modo que o algarismo das centenas seja ímpar ou seja múltiplo de 3? **Cuidado!** Esse enunciado não exige que o número seja formado por algarismos **distintos**.

B.16 (U. Gama Filho-RJ) Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantos múltiplos positivos de 5, compostos de três algarismos distintos, podemos formar?

a) 32 b) 36 c) 40 d) 60 e) 72

B.17 Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantos múltiplos positivos de 5, compostos de três algarismos, podemos formar?

B.18 Encontre o total de números naturais pares, de quatro algarismos distintos, que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

B.19 Obtenha a quantidade de números naturais maiores que 34.000 e de cinco algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Exercícios complementares de C.11 a C.17

Bilhões e bilhões

Quanto valem 1 bilhão ou 1 trilhão, em dólares ou quilômetros? A resposta é mais vaga do que pode parecer. Se os números que estão inseridos na experiência cotidiana mensuram alguns padrões — a duração do ano, o preço de um livro, o custo de um carro —, os grandes números são enganosos. Que extensão são os 150 milhões de quilômetros que separam a Terra do Sol? E os 5 bilhões até Plutão, ou os 41 trilhões para a estrela mais próxima, o sistema triplo da Alfa do Centauro? São respostas bem distantes do senso comum.

(...)

Jogar com a sutileza dos números é uma provocação que o astrônomo norte-americano Carl Sagan — morto de câncer em dezembro de 1996 — faz em seu último livro *Bilhões e bilhões — Reflexões sobre a vida e a morte na virada do milênio*. A brincadeira é avaliar quanto tempo se leva para contar, por exemplo, de 0 a 1 milhão, à razão de um número por segundo. A resposta: 12 dias ininterruptos. E para se chegar a 1 bilhão? 32 anos. E a 1 trilhão? 32 mil anos. Quem quiser pode fazer cálculos envolvendo a população brasileira (160 milhões no ano de 1998), a dívida externa brasileira (US$ 150 bilhões no ano de 1998) e os gastos militares internacionais (US$ 1 trilhão).

(...)

Carl Sagan deixa inacabado o seu último trabalho, *O Estado de S. Paulo*, 4 jul. 1998.

Para ler o texto na íntegra consulte o site **Estadão na escola** (www.estadao-escola.com.br), clicando em "Pesquisa", "Temas transversais" e "Cultura" com as palavras-chaves "Sagan" e "bilhões".

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (UFCE) Atualmente, as placas dos veículos são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Considerando essas informações, calcule o número de placas distintas que podem ser fabricadas, iniciadas pelas letras BNP, nesta ordem, e cujo último algarismo seja ímpar.

LUIZ ANTÔNIO

C.2 (Vunesp) Os jornais noticiaram que, a partir de 1990, o código de placas dos automóveis particulares seria constituído por três letras seguidas de quatro algarismos, admitindo-se repetições. Usando-se 26 letras e dez algarismos, o maior número possível de placas desse tipo em que figuram pelo menos uma letra R e pelo menos uma letra C é:
a) $32 \cdot 35 \cdot 10^4$
b) $3 \cdot 2 \cdot 26 \cdot 10^4$
c) $3 \cdot 26 \cdot 10^4$
d) $325 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 10^4$
e) $41 \cdot 6 \cdot 10^4$

C.3 Quantos subconjuntos tem o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$?

C.4 Quantos números naturais maiores do que 400 e de três algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?

C.5 Quantos números naturais maiores do que 400 e de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?

C.6 (UFRN) Quantos números de 7 dígitos, maiores que 6.000.000, podem ser formados com os algarismos 0, 1, 3, 4, 6, 7 e 9, sem repeti-los?
a) 1.800
b) 720
c) 5.400
d) 5.040
e) 2.160

C.7 (Fuvest-SP) Quantos são os números inteiros positivos de cinco algarismos que não têm algarismos iguais em posições adjacentes?
a) 5^9 b) 9×8^4 c) 8×9^4 d) 8^5 e) 9^5

C.8 Quatro linhas de ônibus unem a cidade *A* à cidade *B* e três linhas unem a cidade *B* à cidade *C*. Um usuário vai viajar de *A* para *C* passando por *B* e vai voltar para *A*, passando novamente por *B*. De quantos modos diferentes esse usuário poderá escolher as linhas, se na volta ele não puder usar a linha que usou na ida?

C.9 (UFPE) Uma prova de matemática é constituída de 16 questões do tipo múltipla escolha, tendo cada questão 5 alternativas, das quais deve ser assinalada como resposta apenas uma. Respondendo ao acaso todas as questões, o número de maneiras diferentes que se pode preencher o cartão de resposta é:
a) 80 b) 16^5 c) 5^{32} d) 16^{10} e) 5^{16}

C.10 (Fuvest-SP) Sendo $A = \{2, 3, 5, 6, 9, 13\}$ e $B = \{a^b \mid a \in A, b \in A \text{ e } a \neq b\}$. O número de elementos de *B* que são números pares é:
a) 5 b) 8 c) 10 d) 12 e) 13

C.11 Qual é o total de números pares ou múltiplos de 5, com três algarismos distintos, que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

C.12 (UFBA) Para abrir um cofre eletrônico deve-se digitar uma seqüência formada por quatro algarismos distintos, sendo que o primeiro é o triplo do segundo. Uma pessoa que desconhece essa seqüência pretende abrir o cofre. O maior número possível de seqüências que ela deve digitar é:
a) 170 b) 240 c) 180 d) 280 e) 168

C.13 (FGV-SP) Uma pessoa vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco mas, na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. O número máximo de tentativas para acertar a senha é:
a) 1.680
b) 1.344
c) 720
d) 224
e) 136

C.14 (UFCE) A quantidade de números inteiros compreendidos entre 30.000 e 65.000 que podemos formar utilizando somente os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7, de modo que não figurem algarismos repetidos, é:
a) 48 b) 66 c) 96 d) 120

C.15 Escrevendo em ordem crescente todos os números naturais, de cinco algarismos distintos, formados por 1, 2, 3, 4 e 5, qual a ordem (número da posição) do número 32.415?

C.16 (Enem) Imagine uma eleição envolvendo 3 candidatos *A*, *B*, *C* e 33 eleitores (votantes). Cada eleitor vota fazendo uma ordenação dos três candidatos. Os resultados são os seguintes:

Ordenação	Nº de votantes
A B C	10
A C B	04
B A C	02
B C A	07
C A B	03
C B A	07
Total de votantes	**33**

A primeira linha do quadro descreve que 10 eleitores escolheram *A* em 1º lugar, *B* em 2º lugar, *C* em 3º lugar e assim por diante.
Considere o sistema de eleição no qual cada candidato ganha 3 pontos quando é escolhido em 1º lugar, 2 pontos quando é escolhido em 2º lugar e 1 ponto se é escolhido em 3º lugar. O candidato que acumular mais pontos é eleito. Nesse caso:
a) *A* é eleito com 66 pontos.
b) *A* é eleito com 68 pontos.
c) *B* é eleito com 68 pontos.
d) *B* é eleito com 70 pontos.
e) *C* é eleito com 68 pontos.

C.17 (Enem) Vinte anos depois da formatura, cinco colegas de turma decidem organizar uma confraternização. Para marcar o dia e o local da confraternização, precisam comunicar-se por telefone. Cada um conhece o telefone de alguns colegas e desconhece o de outros. No quadro abaixo, o número **1** indica que o colega da linha correspondente conhece o telefone do colega da coluna correspondente; o número **0** indica que o colega da linha não conhece o telefone do colega da coluna. Exemplo: Beto sabe o telefone do Dino que não conhece o telefone do Aldo.

	Aldo	Beto	Carlos	Dino	Ênio
Aldo	1	1	0	1	0
Beto	0	1	0	1	0
Carlos	1	0	1	1	0
Dino	0	0	0	1	1
Ênio	1	1	1	1	1

O número **mínimo** de telefonemas que Aldo deve fazer para se comunicar com Carlos é:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Capítulo 43

CLASSIFICAÇÃO DOS AGRUPAMENTOS E MÉTODOS DE CONTAGEM

1. ARRANJO SIMPLES

Com os elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, formemos todas as seqüências possíveis de três elementos distintos:

$$\begin{array}{llll} (a, b, c) & (a, b, d) & (a, c, d) & (b, c, d) \\ (a, c, b) & (a, d, b) & (a, d, c) & (b, d, c) \\ (b, a, c) & (b, a, d) & (c, a, d) & (c, b, d) \\ (b, c, a) & (b, d, a) & (c, d, a) & (c, d, b) \\ (c, a, b) & (d, a, b) & (d, a, c) & (d, c, b) \\ (c, b, a) & (d, b, a) & (d, c, a) & (d, b, c) \end{array}$$

Tais seqüências são chamadas de "arranjos simples dos quatro elementos de I tomados três a três". Isto é, um arranjo simples de três elementos de I é qualquer **seqüência** formada por três elementos distintos de I. Observe que dois arranjos simples quaisquer se diferenciam ou pela **ordem** dos elementos ou pela **natureza** dos elementos que os compõem. Por exemplo:

- $(a, b, c) \neq (b, c, a)$ **(diferem pela ordem dos elementos)**
- $(a, b, c) \neq (a, b, d)$ **(diferem pela natureza dos elementos)**

O número de arranjos simples de quatro elementos distintos tomados três a três é indicado pelo símbolo $A_{4,3}$ e pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem. Devemos distribuir os quatro elementos do conjunto I em três casas, sem repetição:

	1º elemento	2º elemento	3º elemento
$A_{4,3} =$	4	$\cdot$ 3	$\cdot$ 2

$\therefore A_{4,3} = 24$

Definição

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p um número natural não-nulo tal que $p \leqslant n$. Chama-se **arranjo simples de** p **elementos de** I toda seqüência formada por p elementos de I distintos.

Exemplo

Os arranjos simples dos elementos do conjunto $I = \{5, 6, 7, 8\}$ tomados dois a dois são:

$$\begin{array}{lll} (5, 6) & (5, 8) & (6, 8) \\ (6, 5) & (8, 5) & (8, 6) \\ (5, 7) & (6, 7) & (7, 8) \\ (7, 5) & (7, 6) & (8, 7) \end{array}$$

O número de arranjos simples de quatro elementos tomados dois a dois é indicado por $A_{4,2}$ e pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem. Devemos distribuir os quatro elementos de I em duas casas, sem repetição:

	1º elemento	2º elemento	
$A_{4,2} =$	4	$\cdot$ 3	$\therefore A_{4,2} = 12$

Cálculo do número de arranjos simples de *n* elementos distintos tomados *p* a *p*

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p um número natural não-nulo, $p \leqslant n$. O número de arranjos simples dos n elementos de I tomados p a p, isto é, $A_{n,p}$, pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem:

	1º elemento	2º elemento	3º elemento	4º elemento	...	pº elemento
Os números de possibilidades	n	$n - 1$	$n - 2$	$n - 3$		$n - (p - 1)$

Assim, temos que:

$A_{n,p} = n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \cdot ... \cdot [n - (p - 1)]$ ou

$$A_{n,p} = n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \cdot ... \cdot (n - p + 1)$$

Daqui por diante, podemos utilizar essa fórmula para o cálculo de $A_{n,p}$; porém, se você preferir aplicar o princípio fundamental em vez da fórmula, achamos até melhor.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Calcular $A_{6,4}$.

Resolução

$$A_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

R.2 Para que valores naturais de n existe o número $A_{n,3}$?

Resolução

O símbolo $A_{n,3}$ indica o número de seqüências de **três elementos distintos** escolhidos dentre n elementos. Logo, o menor n natural possível é 3; se n fosse menor que 3, não poderíamos formar uma seqüência com três elementos **distintos**. Logo, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Descreva todos os arranjos simples dos elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$ tomados dois a dois.

B.2 Apresente todos os arranjos simples dos elementos do conjunto $I = \{2, 4, 6, 8\}$ tomados três a três.

B.3 Dentre os agrupamentos seguintes, quais são arranjos simples?

a) Com os elementos do conjunto:

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

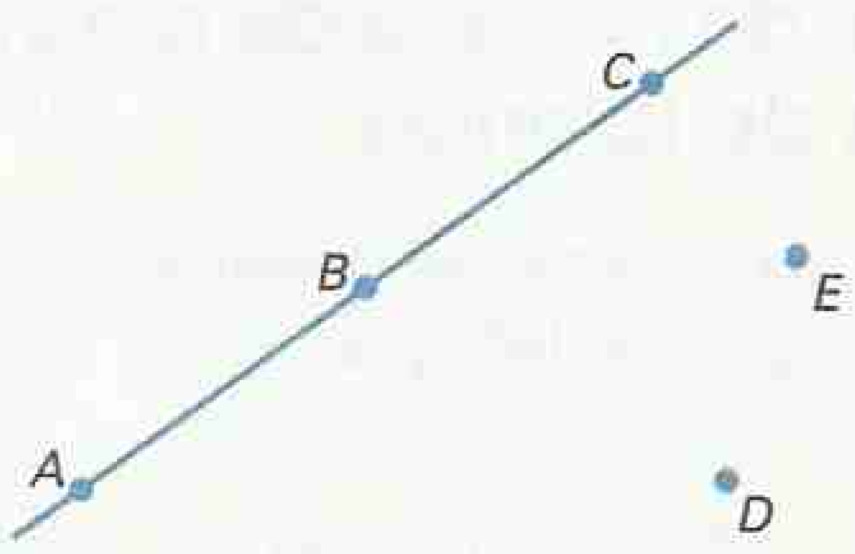
formam-se agrupamentos, sendo que cada agrupamento representa um **subconjunto** de I com três elementos.

b) Com os elementos do conjunto:

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

formam-se agrupamentos, sendo que cada agrupamento representa uma **seqüência** formada por três elementos distintos de I.

c) Com os pontos A, B, C, D e E da figura



formam-se agrupamentos, sendo que cada agrupamento determina um triângulo.

d) Com as letras da palavra "caderno", formam-se agrupamentos de modo que cada agrupamento é um anagrama dessa palavra.

Nota

Chama-se **anagrama** de uma palavra a própria palavra ou qualquer outra que se obtém trocando-se a ordem de suas letras. Alguns **anagramas** da palavra CADERNO são: CADERNO, DECARNO, NODECAR, etc.

B.4 Calcule:

a) $A_{8,3}$ b) $A_{5,4}$ c) $A_{6,6}$

B.5 Determine o valor de:

a) $A_{4,2}$ b) $A_{5,3}$ c) $A_{4,1}$

B.6 Para que valores naturais de n existe a expressão $A_{n,6}$?

B.7 Obtenha valores naturais de n de modo que exista a expressão $\dfrac{A_{n,4}}{A_{n,2}}$.

B.8 Sendo n um número natural e $n \geqslant 4$, calcule o valor da expressão $E = \dfrac{A_{n,4}}{A_{n,2}} - n^2 + 5n$.

B.9 Num teatro, uma fila possui exatamente vinte cadeiras numeradas. O número de maneiras distintas de dez pessoas se sentarem nessa fila é:

a) $A_{20,20}$ c) $A_{20,10}$ e) $A_{10,1}$
b) $A_{10,10}$ d) $A_{10,20}$

B.10 Dez atletas participam de uma corrida de atletismo. Serão premiados apenas os três primeiros colocados, não podendo haver empate. O número de maneiras de serem distribuídos os prêmios é:

a) $A_{10,3}$ c) $A_{3,3}$ e) $A_{3,1}$
b) $A_{10,10}$ d) $A_{3,10}$

B.11 A quantidade de números naturais de cinco algarismos distintos formados pelos algarismos do conjunto $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ é:

a) $A_{9,9}$ c) $A_{5,5}$ e) $A_{9,5}$
b) $A_{5,1}$ d) $A_{9,1}$

Exercícios complementares de C.1 a C.5

Fatorial

Certos cálculos da análise combinatória são tediosos e desanimadores, como, por exemplo:

$$A_{12,12} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Para facilitar as operações com expressões desse tipo, adotamos o símbolo $n!$ (lê-se "fatorial de n") para indicar o produto dos números naturais consecutivos n, $(n - 1)$, $(n - 2)$, ..., 1, com $n \geqslant 2$. Assim, temos:

$$12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Essa nova notação nos auxilia em problemas que envolvem cálculos trabalhosos, permitindo-nos apresentar resoluções de maneira abreviada.

Definição

Seja n um número natural, $n \geqslant 2$. Define-se o fatorial de n, que indicamos por $n!$, como o produto dos números naturais consecutivos:

$$n, (n - 1), (n - 2), ..., 1, \text{ isto é:}$$

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \cdot ... \cdot 1$$

Exemplos

a) $2! = 2 \cdot 1 = 2$
b) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
c) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
d) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Propriedade fundamental dos fatoriais

Observando a igualdade $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, percebemos que $7! = 7 \cdot 6!$.

Podemos generalizar esse resultado através da seguinte propriedade:

$$n! = n(n - 1)! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$$

Essa propriedade é conhecida como **propriedade fundamental dos fatoriais**.

Exemplos

a) $9! = 9 \cdot 8!$
b) $10! = 10 \cdot 9!$
c) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8!$
d) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!$

Extensão da definição de fatorial

Para que não tenhamos exceções nas aplicações de fórmulas que vamos estudar mais adiante, é conveniente definirmos **1!** e **0!**.

Vimos que a propriedade:

$$n! = n(n-1)!$$

é válida para todo n, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$. E se fizermos $n = 2$? Vejamos o que acontece:

$$2! = 2(2-1)! \therefore 2! = 2 \cdot 1!$$
$$\therefore 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! \therefore 1 = 1!$$

Assim sendo, para que a propriedade fundamental valha também para $n = 2$, definimos:

$$1! = 1$$

Vamos ousar um pouco mais e atribuir o valor 1 para a variável n na igualdade $n! = n(n-1)!$:

$$1! = 1(1-1)! \therefore 1! = 1 \cdot 0! \therefore 1! = 0!$$

Assim sendo, para estendermos a propriedade fundamental para $n = 1$, definimos:

$$0! = 1$$

Com essas duas novas definições, $1! = 1$ e $0! = 1$, temos que:

$$n! = n(n-1)! \quad \forall n, n \in \mathbb{N}^*$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.3 Calcular:

a) $6!$ b) $3! + 2!$ c) $\dfrac{4!}{0!}$ d) $1! + 0!$

Resolução

a) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) $3! + 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8$

c) $\dfrac{4!}{0!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 24$

d) $1! + 0! = 1 + 1 = 2$

R.4 Simplificar as frações:

a) $\dfrac{8!}{7!}$ b) $\dfrac{8!}{6!}$ c) $\dfrac{3!}{5!}$ d) $\dfrac{7! \cdot 9!}{8! \cdot 5!}$

Resolução

a) $\dfrac{8!}{7!} = \dfrac{8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 8$

b) $\dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 56$

c) $\dfrac{3!}{5!} = \dfrac{\cancel{3!}}{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}} = \dfrac{1}{20}$

d) $\dfrac{7! \cdot 9!}{8! \cdot 5!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!} \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot \cancel{5!}} = 378$

R.5 Resolver a equação $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20$.

Resolução

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20 \Rightarrow \frac{(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 20$$
$$\therefore n^2 + n - 20 = 0 \therefore n = 4 \text{ ou } n = -5$$

Verificação

Lembramos que só se define fatorial para número natural. Assim sendo, devemos verificar se, para esses valores de n, existem os fatoriais apresentados na equação.

Para $n = 4$, temos $\dfrac{(4+1)!}{(4-1)!} = 20 \Rightarrow \dfrac{5!}{3!} = 20$; logo, 4 é raiz da equação.

Para $n = -5$, temos:

$$\frac{(-5+1)!}{(-5-1)!} = 20 \Rightarrow \frac{(-4)!}{(-6)!} = 20 \textbf{ (Absurdo!)}$$

Como não existem os fatoriais $(-4)!$ e $(-6)!$, temos que -5 não é raiz da equação.

Logo, $S = \{4\}$.

Cálculo do número de arranjos simples através de fatoriais

Vimos que o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_{n,\,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Com o auxílio dos fatoriais podemos apresentar essa fórmula de uma maneira mais simples. Para entender a transformação que será feita, vejamos antes um caso particular:

Na igualdade $A_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5$, multiplicando e ao mesmo tempo dividindo o segundo membro por $4!$, teremos

$$A_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = \frac{7!}{4!}$$

Assim sendo, o número $A_{7,\,3}$ pode ser expresso através de fatoriais por $\dfrac{7!}{4!}$.

Generalização

Consideremos a igualdade:

$$A_{n,\,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Multiplicando e ao mesmo tempo dividindo o segundo membro dessa igualdade por $(n-p)!$, temos:

$$A_{n,\,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,\,p} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$\therefore \quad A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Essa é a fórmula que calcula $A_{n,\,p}$ através de fatoriais.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.6 Calcular, usando a fórmula $A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$:

a) $A_{6,\,4}$ b) $A_{7,\,3}$ c) $A_{5,\,5}$

Resolução

a) $A_{6,\,4} = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} =$

$= 360$

b) $A_{7,\,3} = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$

c) $A_{5,\,5} = \dfrac{5!}{(5-5)!} = \dfrac{5!}{0!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} =$

$= 120$

Nota

Estende-se a fórmula $A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ para $n = 0$ ou $p = 0$.

Exemplos

a) $A_{4,\,0} = \dfrac{4!}{(4-0)!} = \dfrac{4!}{4!} = 1$

b) $A_{0,\,0} = \dfrac{0!}{(0-0)!} = \dfrac{0!}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.12 Calcule:

a) $7!$

b) $3! \cdot 2!$

c) $4! - 2!$

d) $\dfrac{0!}{3!}$

B.13 Assinale V ou F:

a) $3! + 2! = 5!$

b) $3! \cdot 2! = 6!$

c) $4! + 4! = 2 \cdot 4!$

d) $n! = n(n-1)(n-2)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$.

e) $n! = n(n-1)(n-2)!$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

f) $n! + n! = (2n)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

g) $n! + n! = 2 \cdot n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

h) $n! - n! = 0!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

B.14 Simplifique as frações:

a) $\dfrac{6!}{3!}$

b) $\dfrac{4!}{6!}$

c) $\dfrac{5!8!}{4!7!}$

d) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$

e) $\dfrac{(n-3)!}{n!}$

f) $\dfrac{(n+4)!}{(n+2)!}$

g) $\dfrac{(n+2)!}{(n+3)!}$

h) $\dfrac{(n-5)!}{(n-7)!}$

i) $\dfrac{(n-5)!}{(n-3)!}$

B.15 Resolva a equação $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!} = 12$.

B.16 (U. Católica de Salvador-BA) A fração $\dfrac{(n+1)! + n!}{n!}$ é igual a:

a) n

b) $n + 1$

c) $n + 2$

d) $\dfrac{n+1}{n}$

e) $\dfrac{n+2}{n}$

Sugestão. Escreva o numerador sob a forma $(n+1) \cdot n! + n!$ e fatore-o.

B.17 Determine o conjunto dos valores de n, tais que $\dfrac{n! + (n+1)!}{(n-1)!} = 15$.

B.18 (FEI-SP) Se $(n+4)! + (n+3)! = 15(n+2)!$, então:

a) $n = 4$

b) $n = 3$

c) $n = 2$

d) $n = 1$

e) $n = 0$

B.19 (UFPE) A expressão $A_{5,\,2} + A_{3,\,3} + A_{9,\,0}$ é igual a:

a) 27

b) 26

c) 12

d) 11

e) 29

B.20 Resolva a equação $A_{n,\,2} = 20$.

B.21 Obtenha o conjunto solução da equação $\dfrac{A_{n,\,3}}{A_{n,\,4}} = \dfrac{1}{5}$.

Exercícios complementares de C.6 a C.12

2. PERMUTAÇÃO SIMPLES

Consideremos o conjunto $I = \{a, b, c\}$. Os arranjos simples dos três elementos de I tomados três a três são:

(a, b, c)

(a, c, b)

(b, a, c)

(b, c, a)

(c, a, b)

(c, b, a)

Cada um desses arranjos é chamado de **permutação simples** dos elementos de I. Isto é, uma permutação simples dos elementos de I é qualquer seqüência de elementos distintos formada por todos os elementos de I. Observe que duas dessas permutações se diferenciam apenas pela ordem dos elementos.

Exemplo

$(a, b, c) \neq (b, a, c)$ **(diferem pela ordem dos elementos)**

Definição

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto com n elementos. Chama-se **permutação simples dos n elementos de I** todo **arranjo simples** desses n elementos tomados n a n.

Exemplos

a) As permutações simples dos três elementos do conjunto $I = \{1, 2, 3\}$ são:

$$(1, 2, 3) \qquad (2, 1, 3) \qquad (3, 1, 2)$$
$$(1, 3, 2) \qquad (2, 3, 1) \qquad (3, 2, 1)$$

Isto é, são todos os arranjos simples dos três elementos de I tomados três a três.

b) Quantas permutações simples podemos formar com os elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$?
O número de permutações simples de quatro elementos distintos, que indicamos por P_4, é igual ao número de arranjos simples desses quatro elementos tomados quatro a quatro. Isto é:

$$P_4 = A_{4,4} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} =$$
$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 24$$

Algumas dessas permutações são:

$$(a, b, c, d)$$
$$(a, b, d, c)$$
$$(a, c, b, d)$$
$$\vdots$$

Cálculo do número de permutações simples de *n* elementos distintos

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto com n elementos. O número de permutações simples dos n elementos de I, que indicamos por P_n, é igual ao número de arranjos simples desses n elementos tomados n a n. Isto é:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Assim, temos que:

$$\boxed{P_n = n!}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.7 De quantas maneiras diferentes cinco pessoas podem formar uma fila indiana?

Resolução

O número de maneiras é igual ao número de permutações simples desses cinco elementos, isto é:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Logo, a fila pode ser formada de 120 maneiras diferentes.

R.8 De quantas maneiras diferentes podemos dispor, numa mesma prateleira de uma estante, quatro livros de matemática e três livros de física, de modo que livros de mesma matéria permaneçam juntos?

Resolução

Podemos dispor os livros de matemática antes dos de física **ou** os de física antes dos de matemática. Isto é:

$$\overbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}^{\textbf{Matemática}} \cdot \overbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}^{\textbf{Física}} = P_4 \cdot P_3 = 4!3!$$

ou

$$\overbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}^{\textbf{Física}} \cdot \overbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}^{\textbf{Matemática}} = P_3 \cdot P_4 = 3!4!$$

Temos, então, como resposta $4!3! + 3!4! = 288$.

ou

Assim, os livros podem ser dispostos na prateleira de 288 modos diferentes.

R.9 Com a palavra MARTELO:

a) quantos anagramas podemos formar?
b) quantos anagramas começam por M?
c) quantos anagramas começam por M e terminam por O?
d) quantos anagramas começam por vogal?
e) quantos anagramas terminam por consoante?
f) quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?
g) quantos anagramas começam por vogal ou terminam por consoante?
h) quantos anagramas apresentam as letras M, A e R juntas e nessa ordem?
i) quantos anagramas apresentam as letras M, A e R juntas?

Resolução

a) Um anagrama da palavra MARTELO é a própria palavra ou qualquer outra que se obtém trocando a ordem de suas letras. Assim, o número de anagramas da palavra MARTELO é igual ao número de permutações simples de sete letras distintas, isto é:

$$P_7 = 7! = 5.040$$

b) Fixando-se a letra M na primeira posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas seis posições posteriores:

$$\boxed{\text{M}}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_6 = 6! = 720}$$

Logo, há 720 anagramas que começam por M.

c) Fixando-se as letras M e O na primeira e na sétima posição, respectivamente, sobram cinco letras para serem distribuídas nas cinco posições intermediárias:

$$\boxed{\text{M}}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_5 = 5! = 120}\boxed{\text{O}}$$

Portanto, há 120 anagramas que começam por M e terminam por O.

d) Há três possibilidades para o preenchimento da primeira posição: A, E ou O. Para cada vogal fixada na primeira posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas posições posteriores:

A, E ou O

$$\underbrace{\boxed{}}_{3}\cdot\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_6} = 3 \cdot 6! = 2.160$$

Assim, há 2.160 anagramas que começam por vogal.

e) Há quatro possibilidades para o preenchimento da última (sétima) posição: M, R, T ou L. Para cada consoante fixada na sétima posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas seis posições anteriores:

M, R, T ou L

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_6}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{4} = 6! \cdot 4 = 2.880$$

Assim, há 2.880 anagramas que terminam por consoante.

f) Há três possibilidades para o preenchimento da primeira posição e quatro possibilidades para o preenchimento da última (sétima). Fixadas uma vogal e uma consoante na primeira e na sétima posição, respectivamente, sobram cinco letras para serem distribuídas nas posições intermediárias:

A, E ou O **M, R, T ou L**

$$\underbrace{\boxed{}}_{3}\cdot\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_5}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{4} = 3 \cdot 5! \cdot 4 = 1.440$$

Há, portanto, 1.440 anagramas que começam por vogal e terminam por consoante.

g) Sejam A e B conjuntos de anagramas da palavra MARTELO, tais que:

$A = \{$Anagramas que começam por vogal$\}$;
$B = \{$Anagramas que terminam por consoante$\}$;
$A \cap B = \{$Anagramas que começam por vogal **e** terminam por consoante$\}$;
$A \cup B = \{$Anagramas que começam por vogal **ou** terminam por consoante$\}$.

Lembremos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Nos itens (d), (e) e (f) já calculamos $n(A)$, $n(B)$ e $n(A \cap B)$ e obtivemos:

$$n(A) = 2.160;\ n(B) = 2.880;\ n(A \cap B) = 1.440$$

Logo, $n(A \cup B) = 2.160 + 2.880 - 1.440 = 3.600$. Temos então que 3.600 anagramas começam por vogal ou terminam por consoante.

h) Vamos resolver este item de dois modos diferentes.

Primeiro modo

As letras M, A e R podem ocupar, respectivamente, as seguintes posições: primeira, segunda e terceira; segunda, terceira e quarta; terceira, quarta e quinta; quarta, quinta e sexta; quinta, sexta e sétima. Analisemos cada caso:

$$\boxed{M}\boxed{A}\boxed{R}\underbrace{\boxed{}}_{4}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{3}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{2}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{1} = P_4$$

ou

$$\underbrace{\boxed{}}_{4}\cdot\boxed{M}\boxed{A}\boxed{R}\underbrace{\boxed{}}_{3}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{2}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{1} = P_4$$

ou

$$\underbrace{\boxed{}}_{4}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{3}\cdot\boxed{M}\boxed{A}\boxed{R}\underbrace{\boxed{}}_{2}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{1} = P_4$$

ou

$$\underbrace{\boxed{}}_{4}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{3}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{2}\cdot\boxed{M}\boxed{A}\boxed{R}\underbrace{\boxed{}}_{1} = P_4$$

ou

$$\underbrace{\boxed{}}_{4}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{3}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{2}\cdot\underbrace{\boxed{}}_{1}\boxed{M}\boxed{A}\boxed{R} = P_4$$

Assim, temos:

$P_4 + P_4 + P_4 + P_4 + P_4 = 5P_4 = 5 \cdot 4! = 5! = 120$

Ou seja, 120 anagramas apresentam as letras M, A e R juntas e nessa ordem.

Segundo modo

Observando o primeiro modo, percebemos que o bloco MAR atuou como um único elemento nas permutações. Assim sendo, podemos resolver esse problema calculando o número de permutações dos cinco elementos, MAR, T, E, L e O, isto é, considerando o bloco MAR como um único elemento.

Temos assim $P_5 = 5! = 120$.

i) Nesse caso, um bloco composto pelas letras M, A e R pode ter $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes: MAR, MRA, ARM, AMR, RAM e RMA.

Para cada um desses seis blocos podemos formar $P_5 = 5! = 120$ anagramas, conforme vimos no item (h). Logo, com os seis blocos podemos formar $6 \cdot 120 = 720$ anagramas. Ou seja, o número de anagramas que apresentam as letras M, A e R juntas é $P_3 \cdot P_5 = 6 \cdot 120 = 720$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.22 (Cesgranrio) Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes do município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele varia a ordem de suas visistas. De quantas formas diferentes esse fiscal pode estabelecer a ordem de visita mensal a essas empresas?

a) 180 c) 100 e) 24
b) 120 d) 48

B.23 De quantos modos podemos dispor cinco meninas e quatro meninos em fila indiana de modo que crianças de mesmo sexo não fiquem juntas?

B.24 Quantos números podemos obter permutando apenas os algarismos pares do número 32.456 e mantendo os algarismos ímpares em suas respectivas posições?

B.25 Quantos números naturais de cinco algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 de modo que os algarismos ímpares permaneçam sempre juntos?

B.26 Com a palavra EDITORA:

a) quantos anagramas podemos formar?

b) quantos anagramas começam pela letra T?

c) quantos anagramas começam pela sílaba TO?

d) quantos anagramas começam por vogal?

e) quantos anagramas terminam por consoante?

f) quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?

g) quantos anagramas começam por vogal ou terminam por consoante?

h) quantos anagramas apresentam as letras E, D e T juntas e nessa ordem?

i) quantos anagramas apresentam as letras E, D e T juntas?

j) quantos anagramas não apresentam as letras E, D e T juntas?

B.27 (PUC-SP) Uma palavra é formada por n letras distintas, sendo B uma delas. O número de anagramas dessa palavra que não começam por B é:

a) $n!$
b) $(n + 1)!$
c) $n! - (n - 1)!$
d) $(n - 1)!$
e) $n + 1$

B.28 (UNEB) Num grupo de 5 pessoas, duas são irmãs. O número de maneiras distintas que elas podem ficar em fila, de maneira que as duas irmãs fiquem sempre juntas, é igual a:

a) 24
b) 48
c) 120
d) 240
e) 420

Exercícios complementares de C.13 a C.18

3. PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS

Vimos que o número de permutações de n elementos distintos é dado por:

$$P_n = n!$$

Neste item, vamos aprender a calcular o número de permutações com elementos repetidos. Para entender esse cálculo, observe o problema a seguir.

Qual é o número de anagramas da palavra **OSSOS**?

Se as 5 letras dessa palavra fossem distintas entre si, teríamos 5! anagramas. Porém, ao permutar letras iguais, a palavra não se altera; por isso, concluímos que o número de anagramas é menor que 5!

Para calcular esse número de anagramas, vamos colocar índices nas letras, considerando-as como elementos diferentes, isto é:

$$O_1S_1S_2O_2S_3$$

Em cada seqüência dos elementos O_1, S_1, S_2, O_2, S_3, se permutarmos S_1, S_2 e S_3, entre si, e O_1 e O_2, entre si, obteremos $3! \times 2!$ seqüências diferentes. Por exemplo:

$$S_1S_2O_1O_2S_3 \rightarrow \left.\begin{array}{l} S_1S_2O_1O_2S_3 \\ S_1S_3O_1O_2S_2 \\ S_2S_1O_1O_2S_3 \\ S_2S_3O_1O_2S_1 \\ S_3S_1O_1O_2S_2 \\ S_3S_2O_1O_2S_1 \\ S_1S_2O_2O_1S_3 \\ S_1S_3O_2O_1S_2 \\ S_2S_3O_2O_1S_1 \\ S_2S_1O_2O_1S_3 \\ S_3S_1O_2O_1S_2 \\ S_3S_2O_2O_1S_1 \end{array}\right\} 3! \cdot 2! = 12$$

Porém, se eliminarmos os índices nessas 12 seqüências, teremos o mesmo anagrama **SSOOS**.

Analogamente, se eliminarmos os índices nas 5! seqüências dos elementos O_1, S_1, S_2, O_2, S_3, obteremos grupos de $3! \cdot 2!$ anagramas iguais. O número de grupos assim obtidos é exatamente o número de anagramas distintos da palavra **OSSOS**. Esse número é:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 20$$

ou seja, há 20 anagramas distintos da palavra **OSSOS**.

Podemos generalizar esse raciocínio, considerando os n elementos:

$$\overbrace{\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{\substack{n_1 \text{ elementos} \\ \text{iguais a } a_1}}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{\substack{n_2 \text{ elementos} \\ \text{iguais a } a_2}}, \ldots, \underbrace{a_k, a_k, \ldots, a_k}_{\substack{n_k \text{ elementos} \\ \text{iguais a } a_k}}}^{n \text{ elementos}}$$

tal que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ são distintos entre si. O número de permutações desses n elementos, que indicaremos por $P_n^{(n_1,\, n_2,\, n_3,\, \ldots,\, n_k)}$, é dado por:

$$P_n^{(n_1,\, n_2,\, n_3,\, \ldots,\, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.10 Determinar o número de anagramas da palavra GARRAFA.

Resolução

A palavra apresenta um total de sete letras, com três letras A, duas letras R, uma letra G e uma letra F.

Assim, temos $P_7^{(3,\,2,\,1,\,1)} = \dfrac{7!}{3!2!1!1!}$.

Para simplificar a notação, indicamos esse número simplesmente por $P_7^{(3,\,2)} = \dfrac{7!}{3!2!} = 420$.

Isto é, não indicamos nos parênteses as letras que comparecem uma única vez na palavra.

Portanto, a palavra GARRAFA possui 420 anagramas.

R.11 Determinar o número de anagramas da palavra GARRAFA que começam pela letra A.

Resolução

Fixando uma letra A na primeira posição, sobram as letras G, R, R, A, F e A, que devem ser distribuídas nas seis posições posteriores:

A						

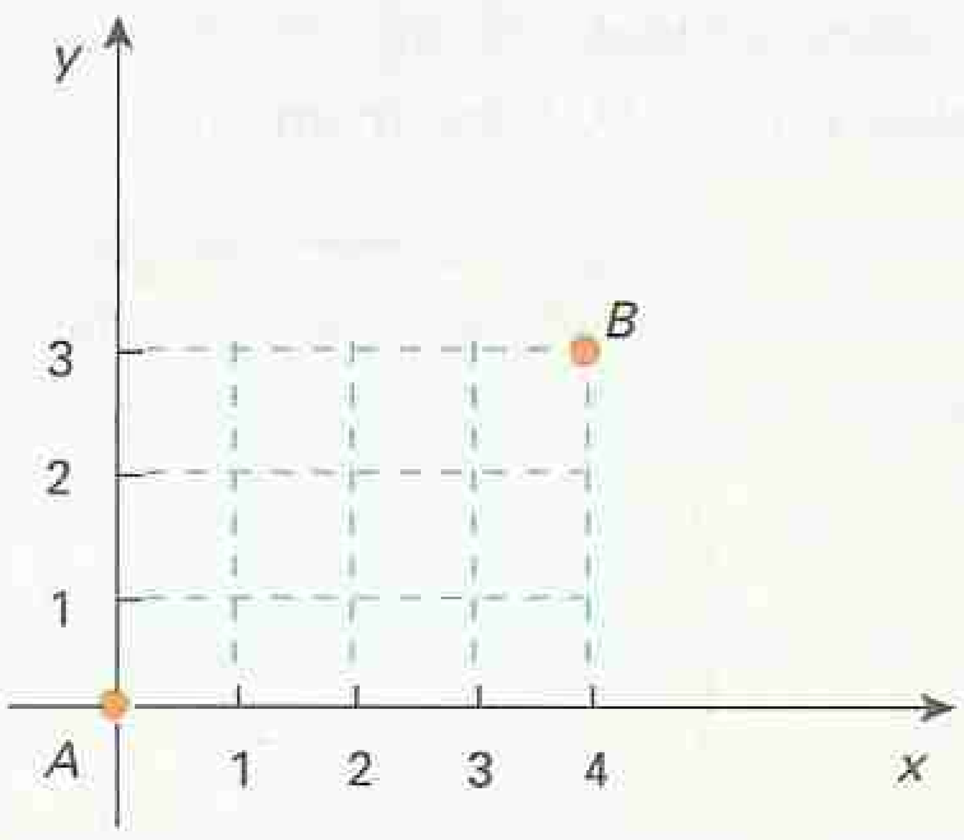
$$P_6^{(2,\,2)} = \frac{6!}{2!2!} = 180$$

Nota

Uma dúvida muito comum é "devemos ou não multiplicar o resultado 180 por 3?", pois há três letras *A*. A resposta é **não**. Porque, se substituirmos o A da primeira posição por outro A da palavra, obteremos os mesmos anagramas.

Logo, há 180 anagramas que começam por A.

R.12 Na figura abaixo, quantos caminhos diferentes podem ser percorridos do ponto *A* ao ponto *B*, deslocando-se uma unidade de cada vez para cima ou para a direita?



Resolução

Para nos deslocarmos de *A* para *B*, nas condições do problema, devemos percorrer 3 unidades para cima e 4 unidades para a direita.

Indiquemos por *d* cada unidade para a direita e por *c* cada unidade para cima.

O número possível de caminhos é igual ao número de seqüências que podem ser formadas com as sete letras: d, d, d, d, c, c, c. Isto é, $P_7^{(4,\,3)} = \frac{7!}{4!3!} = 35$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.29 Determine o número de anagramas da palavra VIOLINO.

B.30 Qual é o número de anagramas da palavra BANANA?

B.31 As embalagens dos produtos vendidos por uma empresa apresentam uma seqüência formada por barras verticais: quatro de largura 1,5 mm; três de largura 0,5 mm; e duas de largura 0,25 mm, como no exemplo ao lado.

Cada seqüência indica o preço de um produto. Quantos preços diferentes podem ser indicados por essas nove barras?

B.32 Obtenha o número de anagramas da palavra TAMPA.

B.33 Quantos anagramas da palavra BARRAR começam por R?

B.34 Encontre o número de anagramas da palavra DEZENA que começam por vogal.

B.35 Ache o total de anagramas da palavra PAPAGAIO que terminam por vogal.

B.36 Quantos anagramas da palavra RETRATAR começam e terminam por vogal?

Exercícios complementares de C.19 a C.24

4. COMBINAÇÃO SIMPLES

Dado o conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, formemos todos os subconjuntos de I com três elementos:

$$\{a, b, c\}$$
$$\{a, b, d\}$$
$$\{a, c, d\}$$
$$\{b, c, d\}$$

Tais subconjuntos são chamados de **combinações simples dos quatro elementos de *I* tomados três a três.** Ou seja, uma combinação simples de três elementos de I é qualquer subconjunto de I formado por três elementos.

Observe que duas combinações simples quaisquer se diferenciam apenas pela natureza dos elementos e **não** pela ordem de apresentação desses elementos.

Exemplos

a) $\{a, b, c\} \neq \{a, b, d\}$ **(diferem pela natureza dos elementos)**

b) $\{b, c, d\} = \{c, b, d\}$ **(a ordem dos elementos não altera o conjunto)**

Definição

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p, $p \in \mathbb{N}$ e $p \leq n$. Chama-se **combinação simples de *p* elementos de *I*** todo subconjunto de I formado por p elementos.

Cálculo do número de combinações simples de *n* elementos distintos tomados *p* a *p*

Para efetuar esse cálculo, vamos relacionar o número de combinações simples com o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p.

Voltemos ao exemplo introdutório desse assunto. As combinações simples dos elementos de $I = \{a, b, c, d\}$ tomados três a três são $\{a, b, c\}$; $\{a, b, d\}$; $\{a, c, d\}$; $\{b, c, d\}$. Indicando por $C_{4,\,3}$ o número de combinações simples de 4 elementos tomados três a três, temos $C_{4,\,3} = 4$. Cada uma dessas combinações gera 3! arranjos simples dos quatro elementos a, b, c, d tomados três a três, por exemplo.

Observe os arranjos gerados pela combinação $\{a, b, c\}$:

$$\underbrace{\{a, b, c\}}_{\text{combinação}} \longrightarrow \left.\begin{array}{l}(a, b, c)\\(a, c, b)\\(b, a, c)\\(b, c, a)\\(c, a, b)\\(c, b, a)\end{array}\right\} 3! \text{ arranjos}$$

Assim, multiplicando por 3! o número $C_{4,3}$, obtém-se o número $A_{4,3}$, isto é:

$$C_{4,3} \times 3! = A_{4,3}$$

Generalizando esse raciocínio para os números naturais n e p, com $n \geqslant p$, obtém-se a fórmula para o cálculo de $C_{n,p}$. Observe:

$$C_{n,p} \times p! = A_{n,p}$$

$$\therefore C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

$$\therefore C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

$$\therefore \boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.13 Calcular:

a) $C_{6,4}$ b) $C_{7,3}$ c) $C_{5,5}$ d) $C_{5,0}$

Resolução

Aplicando a fórmula $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, temos:

a) $C_{6,4} = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} = \dfrac{6!}{4!2!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2 \cdot 1} = 15$

b) $C_{7,3} = \dfrac{7!}{3!(7-3)!} = \dfrac{7!}{3!4!} = \dfrac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = 35$

c) $C_{5,5} = \dfrac{5!}{5!(5-5)!} = \dfrac{5!}{5!0!} = \dfrac{\cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 1} = 1$

d) $C_{5,0} = \dfrac{5!}{0!(5-0)!} = \dfrac{5!}{0!5!} = \dfrac{\cancel{5!}}{1 \cdot \cancel{5!}} = 1$

R.14 Para que valores de n existe o número $C_{n,3}$?

Resolução

Existe tal número para qualquer n, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$.

R.15 Resolver a equação $C_{n,2} = 10$.

Resolução

Condição de existência $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$.

$$C_{n,2} = 10 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 10$$

$$\therefore \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2 \cdot 1\cancel{(n-2)!}} = 10$$

$$\therefore n^2 - n = 20 \therefore n^2 - n - 20 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, temos $n = 5$ ou $n = -4$. **(não convém)**

Logo, $S = \{5\}$.

Critério para diferenciar arranjo de combinação

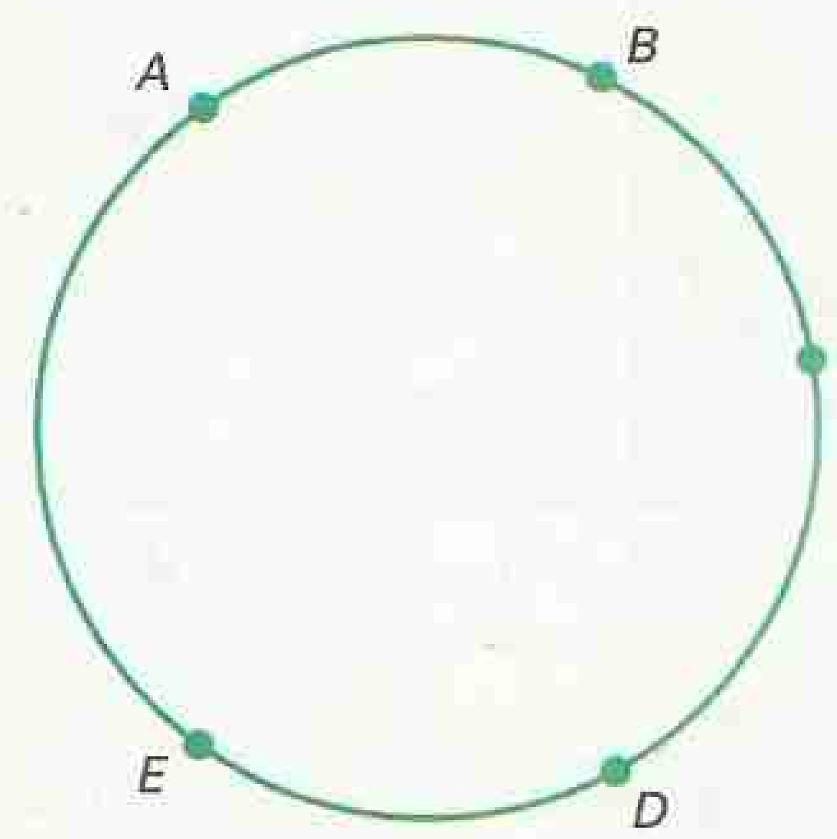
Quando tentamos resolver um problema de análise combinatória, deparamos com a seguinte questão: os agrupamentos mencionados no problema são arranjos ou combinações? Para eliminar essa dúvida, vamos agir da seguinte maneira: construímos um dos agrupamentos sugeridos pelo problema e, a seguir, mudamos a ordem de apresentação dos elementos desse agrupamento:

I. Se com essa mudança na ordem dos elementos obtivermos um agrupamento **diferente** do original, então esse agrupamento é um **arranjo**.

II. Se com essa mudança na ordem dos elementos obtivermos um agrupamento **igual** ao original, então esse agrupamento é uma **combinação**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.16 Quantos triângulos ficam determinados pelos pontos distintos A, B, C, D, E da circunferência abaixo?



Resolução

Um triângulo fica determinado por três pontos (vértices do triângulo) não-colineares (não-pertencentes a uma mesma reta). Como não existem três pontos colineares dentre os pontos A, B, C, D, E, qualquer agrupamento de três pontos distintos determina um triângulo.

Agora, a dúvida: um agrupamento de três pontos para determinar um triângulo é um arranjo ou uma combinação? Vamos aplicar o **critério diferenciador** entre arranjo e combinação.

Formemos um agrupamento de três pontos distintos e, a seguir, mudemos a ordem de apresentação de seus elementos:

Triângulo ABC = Triângulo BAC

Como a mudança na ordem das letras **não** altera o triângulo, temos que esses agrupamentos são combinações. Logo, o número de triângulos é dado por $C_{5,3}$, isto é:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 10$$

R.17 Uma comissão de três membros deve ser escolhida dentre sete pessoas. De quantos modos diferentes se pode escolher a comissão, sabendo que as pessoas que formarem a comissão terão funções idênticas?

Resolução

Como a ordem dos elementos componentes **não** altera a comissão, temos que uma comissão é uma **combinação**. Logo, o número de comissões é:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = 35$$

R.18 Uma comissão de quatro homens e três mulheres deve ser escolhida dentre seis homens e cinco mulheres. De quantos modos diferentes pode-se escolher a comissão, sabendo-se que os membros dessa comissão terão funções idênticas?

Resolução

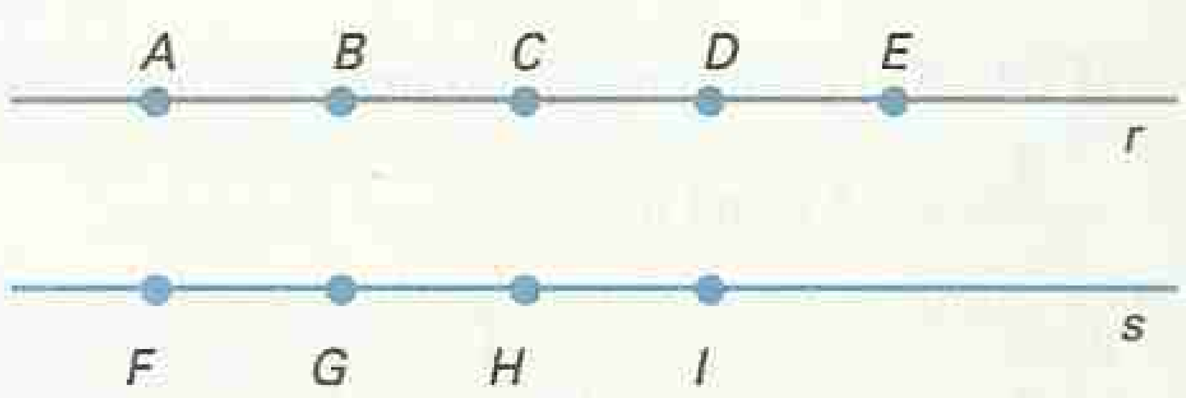
Devemos escolher quatro homens dentre seis e três mulheres dentre cinco. Pelo princípio fundamental de contagem, isso pode ser feito de $C_{6,4} \cdot C_{5,3}$ modos diferentes, isto é:

$$C_{6,4} \cdot C_{5,3} = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot \frac{5!}{3!(5-3)!} =$$

$$= \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot \cancel{2} \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 150$$

R.19 Quantos triângulos ficam determinados por nove pontos distintos, sendo que cinco deles pertencem a uma reta r e os outros quatro pertencem a uma reta s ($s \not\equiv r$) paralela a r?

Resolução



Um triângulo fica determinado por três pontos não-colineares. Assim sendo, algumas combinações de três dentre os nove pontos determinam triângulos e outras não. Por exemplo, a combinação ABF determina um triângulo, enquanto a combinação ABC não determina um triângulo. Podemos resolver esse problema de dois modos diferentes.

Primeiro modo

Vamos calcular todas as combinações dos nove pontos três a três, subtraindo desse resultado o total de combinações que não determinam triângulos. Isto é:

$$C_{9,3} - \underbrace{C_{5,3}}_{\substack{\textbf{Pontos} \\ \textbf{da reta } r}} - \underbrace{C_{4,3}}_{\substack{\textbf{Pontos} \\ \textbf{da reta } s}} = 84 - 10 - 4 = 70$$

Logo, ficam determinados 70 triângulos.

Segundo modo

Um triângulo fica determinado se escolhermos dois pontos numa reta e um ponto na outra, isto é:

- 2 pontos em r **e** 1 ponto em $s \Rightarrow C_{5,2} \cdot C_{4,1} = 10 \cdot 4 = 40$

ou $\leftarrow$ $\oplus$

- 1 ponto em r **e** 2 pontos em $s \Rightarrow C_{5,1} \cdot C_{4,2} = 5 \cdot 6 = 30$

Logo, o número de triângulos é $40 + 30 = 70$.

A análise combinatória e o futebol

Na confecção da tabela de um campeonato de futebol também é necessária a matemática. Imagine que a CBF organize a primeira fase do Campeonato Brasileiro com 24 times separados em quatro grupos de seis, de modo que cada time jogue uma única vez contra cada um dos demais de seu grupo. Através da análise combinatória conclui-se que o número de jogos a serem realizados em cada grupo é $C_{6,2} = 15$, e, portanto, o número de jogos da primeira fase do campeonato será $4 \times 15 = 60$. De modo análogo, calcula-se o número de jogos das próximas fases.

CID

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.37 Determine:

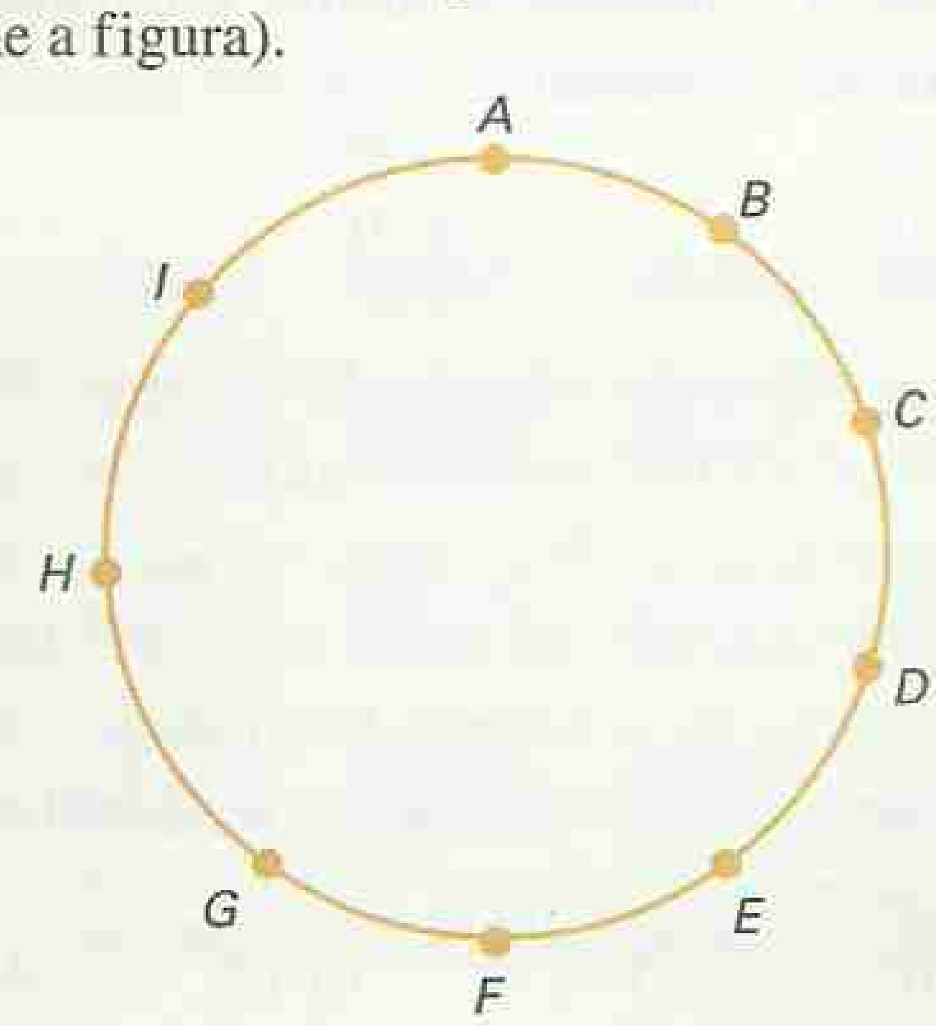
a) $C_{7,5}$ b) $C_{5,4}$ c) $C_{8,8}$ d) $C_{9,1}$

B.38 Calcule o valor da expressão $4C_{6,2} + A_{5,3} - 3P_3$.

B.39 Resolva a equação $C_{n,2} = 15$.

B.40 Resolva a equação $C_{x,3} = 3A_{x,3}$.

B.41 Considere nove diferentes pontos de uma circunferência (conforme a figura).



a) Quantas retas ficam determinadas por esses nove pontos?

b) Quantos triângulos ficam determinados por esses nove pontos?

B.42 (UFMG) Formam-se comissões de três professores escolhidos entre os sete de uma escola. O número de comissões distintas que podem, assim, ser formadas é:
a) 35 c) 210 e) 7!
b) 45 d) 7^3

B.43 (UFBA) Dispondo-se de abacaxi, acerola, goiaba, laranja, maçã, mamão e melão, calcule de quantos sabores diferentes pode-se preparar um suco, usando-se três frutas distintas.

B.44 (Fuvest-SP) Numa primeira fase de um campeonato de xadrez, cada jogador joga uma vez contra todos os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?
a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14
Sugestão. Indique por n o número de jogadores.

CID

B.45 (Faap-SP) O setor de emergência de uma unidade do Unicor tem três médicos e oito enfermeiros. A direção do Unicor deverá formar equipes de plantão constituídas de um médico e três enfermeiros. O número de equipes diferentes possível é:
a) 168 c) 56 e) 336
b) 3 d) 24

B.46 (Fatec-SP) Dentre seis senadores e cinco deputados será escolhida uma comissão de três senadores e dois deputados. De quantas maneiras diferentes essa comissão pode ser formada?
a) 200 c) 80 e) 40
b) 100 d) 50

B.47 (U. Católica de Salvador-BA) Dentre as disciplinas A, B, C, D, E e F um estudante universitário precisa selecionar quatro para cursar no próximo semestre letivo. Sabendo que nessa seleção deve constar, necessariamente, a disciplina E, o número que indica o total de maneiras diferentes que o estudante pode escolher as quatro disciplinas é:
a) 6 b) 10 c) 15 d) 20 e) 24

B.48 Calcule o número de diagonais do octógono convexo.

Exercícios complementares de C.25 a C.33

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 O auditório de um teatro é composto por n cadeiras. De quantas maneiras diferentes as três primeiras pessoas que chegarem para assistir a um espetáculo nesse teatro podem escolher seus lugares?
a) n c) $n(n+1)$ e) $A_{3,3}$
b) $\dfrac{3n}{n+1}$ d) $A_{n,3}$

C.2 O total de números naturais de quatro algarismos distintos formados pelos algarismos do conjunto $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ pode ser expresso por:
a) $A_{6,4}$ c) $A_{6,4} - A_{5,3}$ e) $A_{6,3} - A_{6,2}$
b) $A_{5,3} + A_{5,4}$ d) $A_{6,3}$

C.3 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:
a) $6A_{5,3} = A_{6,4}$
b) Existe $A_{n,4}$ para todo n, $n \in \mathbb{N}$
c) Existe $\dfrac{A_{n,5}}{A_{n,2}}$ se, e somente se, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 5$
d) $A_{6,1} \cdot A_{5,1} \cdot A_{4,1} = A_{6,3}$
e) Se dois arranjos simples são formados pelos mesmos elementos, então esses arranjos são iguais.
f) Dois arranjos simples formados pelos mesmos elementos são iguais se, e somente se, a ordem desses elementos nos dois arranjos for a mesma.
g) Se existir um elemento num arranjo que não pertença a um outro arranjo, então esses arranjos podem ser iguais.

C.4 (PUC-SP) Sendo n um número natural e $n \geq 3$, a razão $\dfrac{A_{n,3}}{A_{n-1,2}}$ é igual a:
a) 2 c) 1 e) $n+1$
b) $2n$ d) n

C.5 (UFCE) Sendo uma placa de automóvel formada por duas letras seguidas de quatro algarismos, quantas placas podem ser formadas por duas letras distintas seguidas de quatro algarismos distintos? (Considere 26 letras e os dez algarismos do nosso sistema de numeração.)
a) $A_{26,2} + A_{10,4}$ d) $6A_{36,1}$
b) $A_{26,2} \cdot A_{10,4}$ e) $2A_{26,1} \cdot 4A_{10,1}$
c) $A_{36,6}$

C.6 Determine n de modo que:

$$\frac{1+2+3+4+\ldots+n}{(n+1)!} = \frac{1}{240}$$

Sugestão. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$ é a soma dos n primeiros termos de uma P.A.

C.7 (U. Taubaté-SP) O(s) valor(es) de n tal que $\dfrac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = 7n$ é (são):
a) 7 c) 0 e 10 e) 0 e 2
b) 0 e 7 d) 1

C.8 (UFPA) O produto dos 30 primeiros números pares positivos é igual a:
a) 60! c) $2 \cdot (60!)^2$ e) $2^{30} \cdot 30!$
b) 30! d) $2^2 \cdot 60!$
Sugestão. Os números 2, 4, 6, 8 etc. podem ser representados por 2×1, 2×2, 2×3, 2×4 etc.

C.9 (UFPE) Qual o maior inteiro n para que 20! seja divisível por 3^n?
a) 2 c) 8 e) 20
b) 7 d) 9
Sugestão. Decompondo em fatores primos cada número do desenvolvimento $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot ... \cdot 1$, verifique quantas vezes aparece o fator primo 3.

C.10 Determine n de modo que $\dfrac{A_{n,\,p}}{A_{n+2,\,p+2}} = \dfrac{1}{12}$.

C.11 (UFMG) Duas das cinqüenta cadeiras de uma sala serão ocupadas por dois alunos. O número de maneiras distintas possíveis que esses alunos terão para escolher duas das cinqüenta cadeiras, para ocupá-las, é:
a) $A_{50,\,2}$ c) $A_{2,\,2}$ e) $\dfrac{A_{50,\,50}}{2}$
b) $A_{50,\,50}$ d) $\dfrac{A_{50,\,2}}{2}$

C.12 (UFSC) Em um bingo, quatro pedras são retiradas sucessivamente e sem reposição de uma urna contendo exatamente 90 pedras, numeradas de 1 a 90. O número de seqüências distintas possíveis para essas quatro pedras, tal que a segunda pedra tenha número 40, é:
a) $A_{89,\,89}$ c) $A_{89,\,3}$ e) $\dfrac{89!}{3!}$
b) $A_{89,\,4}$ d) $\dfrac{89!}{4!}$

C.13 Qual é o número de anagramas da palavra VOLUME que apresentam a letra V antes da letra L?
Sugestão. Para cada anagrama que possui o V antes do L, podemos permutar apenas essas duas letras entre si, obtendo um anagrama que possui o L antes do V. Por exemplo, permutando apenas as letras V e L do anagrama VOMULE, obtemos o anagrama LOVUME.

C.14 (Fatec-SP) Seis pessoas, entre elas João e Pedro, vão ao cinema. Existem seis lugares vagos, alinhados e consecutivos. O número de maneiras distintas como as seis pessoas podem sentar-se sem que João e Pedro fiquem juntos é:
a) 720 c) 480 e) 120
b) 600 d) 240

C.15 (U. Taubaté-SP) Numa estante existem três livros de história, três de matemática e um de geografia. Se se deseja sempre um livro de história em cada extremidade, então o número de maneiras de se arrumar esses sete livros é:
a) 720 c) 81 e) n.d.a
b) 36 d) 126

C.16 (Fuvest-SP) O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam por vogal é:
a) 24 c) 96 e) 144
b) 48 d) 120

C.17 (FEI-SP) Obtenha o número de anagramas da palavra REPÚBLICA nos quais as vogais se mantêm nas respectivas posições.

C.18 (Fuvest-SP) Com as 6 letras da palavra FUVEST podem ser formadas 6! = 720 "palavras" (anagramas) de 6 letras distintas cada uma. Se essas "palavras" forem colocadas em ordem alfabética, como num dicionário, a 250ª "palavra" começa com:
a) EV c) FV e) SF
b) FU d) SE

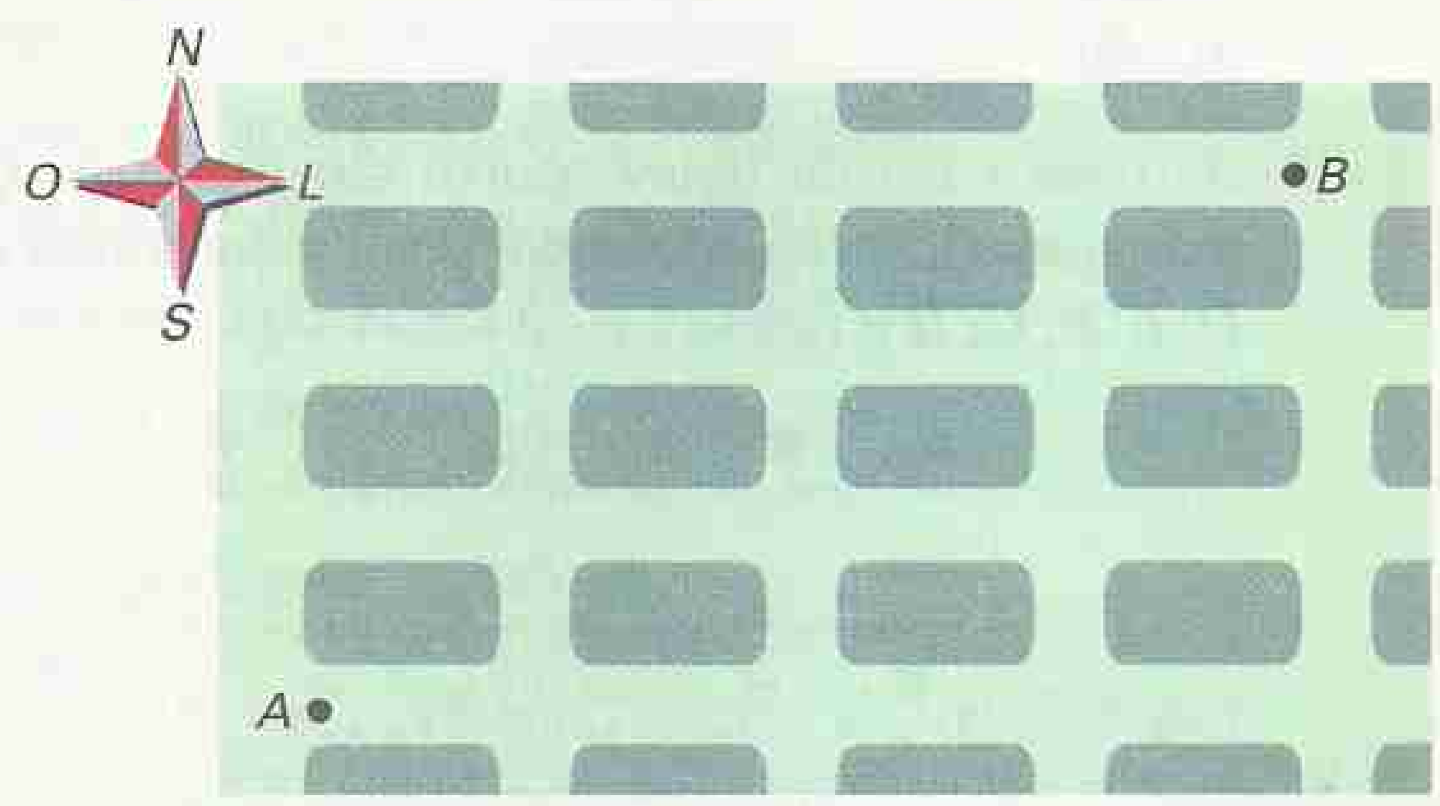
C.19 (UFSC) Um experimento consiste em lançar uma moeda 6 vezes. Considera-se como resultado desse experimento a seqüência das faces obtidas no 1º, 2º, 3º, 4º, 5º e 6º lançamento, respectivamente. Por exemplo, indicando por c a face "cara" e por k a face "coroa", um resultado possível desse experimento é a seqüência (c, c, k, c, k, c). O número de resultados possíveis desse experimento apresentando quatro caras e duas coroas é:
a) 30 b) 24 c) 20 d) 18 e) 15

C.20 (UFCE) O mapa de uma cidade é formado por seis bairros distintos. Deseja-se pintar esse mapa com as cores vermelho, azul e verde, do seguinte modo: um bairro deve ser vermelho, dois bairros azuis e os demais verdes. De quantas maneiras distintas isso pode ser feito?

C.21 Considerando duas vezes o símbolo "+" e seis vezes o símbolo "|", é possível formar várias seqüências: uma delas é | | | + | | + |. Calcule o número de seqüências que podem ser formadas.

C.22 Uma solução da equação $x + y + z = 6$ é o terno ordenado (4, 0, 2), pois $4 + 0 + 2 = 6$. Quantos ternos ordenados, formados apenas por números naturais, são soluções dessa equação?
Sugestão. Representando as seis unidades por | | | | | |, cada seqüência formada por | | | | | | ++ pode ser associada a uma única solução dessa equação e vice-versa. Observe: a seqüência | | | + | | + | pode ser associada à solução (3, 2, 1); | | | | + + | | pode ser associada à solução (4, 0, 2) etc.

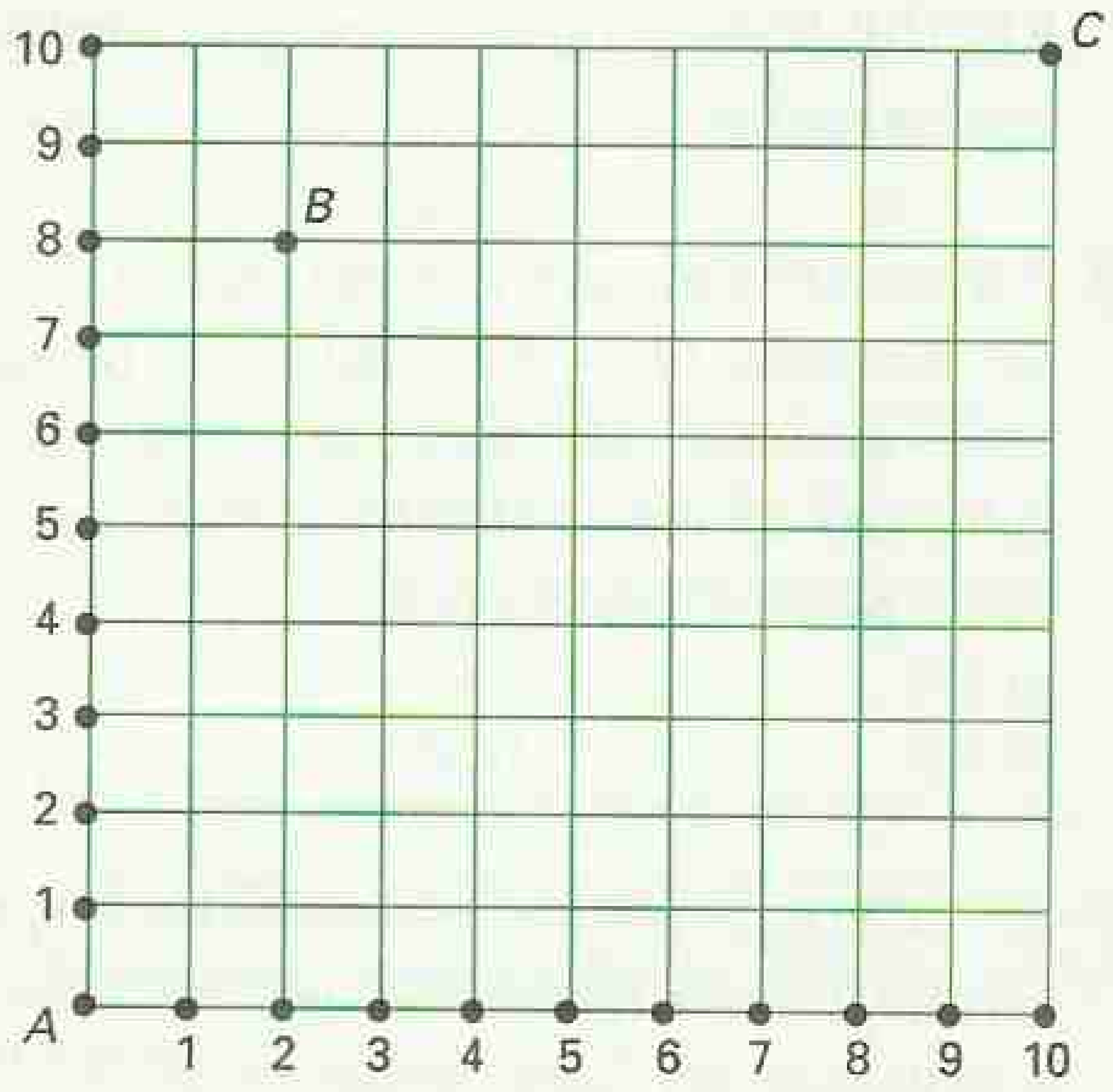
C.23 A figura mostra um mapa de uma certa região:



Uma pessoa deseja deslocar-se de A para B andando sempre para o norte ou para o leste. Quantos caminhos diferentes podem ser feitos?

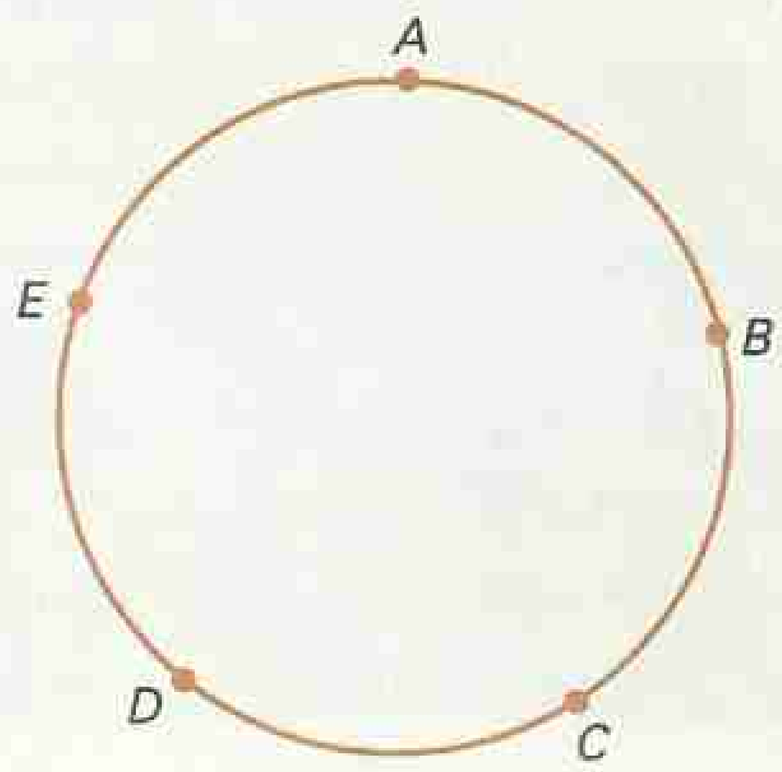
ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

C.24 (UFMG) Observe a figura.



Considere os caminhos ligando A a C, passando por B, traçados a partir de A, deslocando-se sempre, ou 1 unidade para a direita, na horizontal, ou 1 unidade para cima, na vertical. Determine o número total de caminhos distintos obtidos dessa forma.

C.25 Considere cinco diferentes pontos de uma circunferência (conforme a figura). Quantos polígonos convexos ficam determinados por esses cinco pontos:



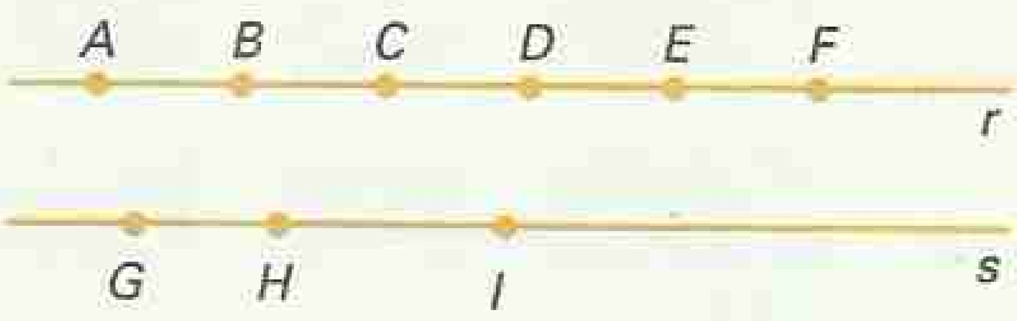
C.26 (UFMG) Numa Câmara de Vereadores, trabalham 6 vereadores do partido A, 5 vereadores do partido B e 4 vereadores do partido C. O número de comissões de 7 vereadores que podem ser formadas, devendo cada comissão ser constituída de 3 vereadores do partido A, 2 vereadores do partido B e 2 vereadores do partido C, é igual a:

a) 7
b) 36
c) 152
d) 1.200
e) 28.800

C.27 (Mackenzie-SP) Um juiz dispõe de 10 pessoas, das quais somente 4 são advogados, para formar um único júri com 7 jurados. O número de formas de compor o júri, com pelo menos 1 advogado, é:

a) 160
b) 140
c) 128
d) 108
e) 120

C.28 As retas r e s da figura abaixo são paralelas. Quantos triângulos ficam determinados pelos nove pontos A, B, C, D, E, F, G, H e I?



C.29 (UFSE) Considere todos os produtos de três fatores distintos que podem ser obtidos com os elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$. Quantos deles são pares?

a) 10
b) 18
c) 20
d) 36
e) 60

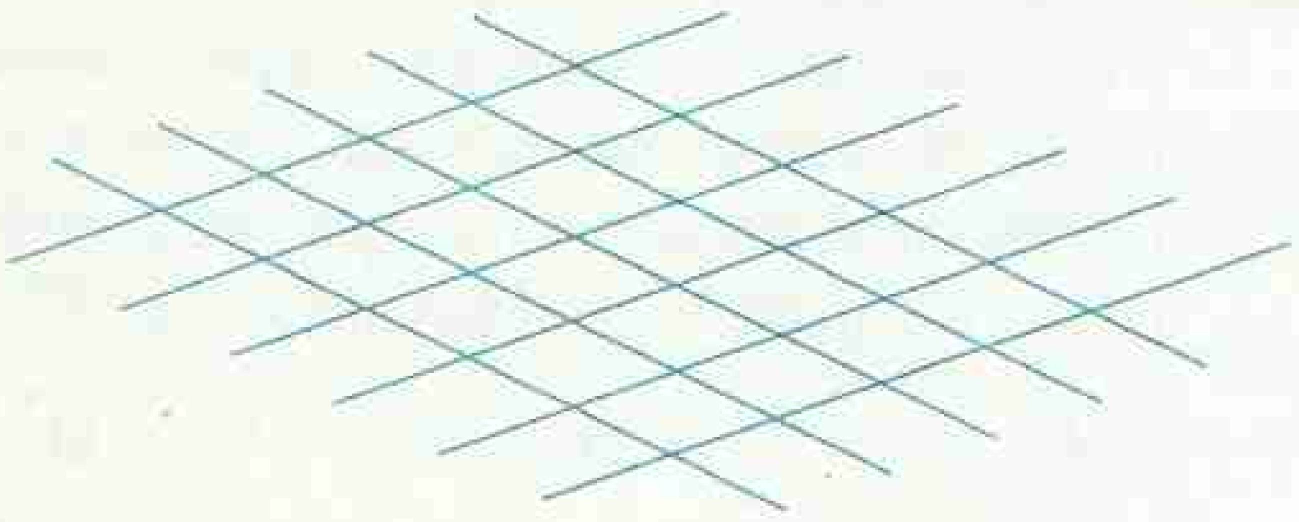
C.30 (UFRS) Em uma classe de doze alunos, um grupo de cinco será selecionado para uma viagem. De quantas maneiras distintas esse grupo poderá ser formado, sabendo que, entre os doze alunos, dois são irmãos e só poderão viajar se estiverem juntos?

a) 30.240
b) 594
c) 462
d) 408
e) 372

C.31 (U. F. Santa Maria-RS) O valor de m que satisfaz a igualdade $A_{(m-1),\,2} = C_{m,\,(m-2)}$ é:

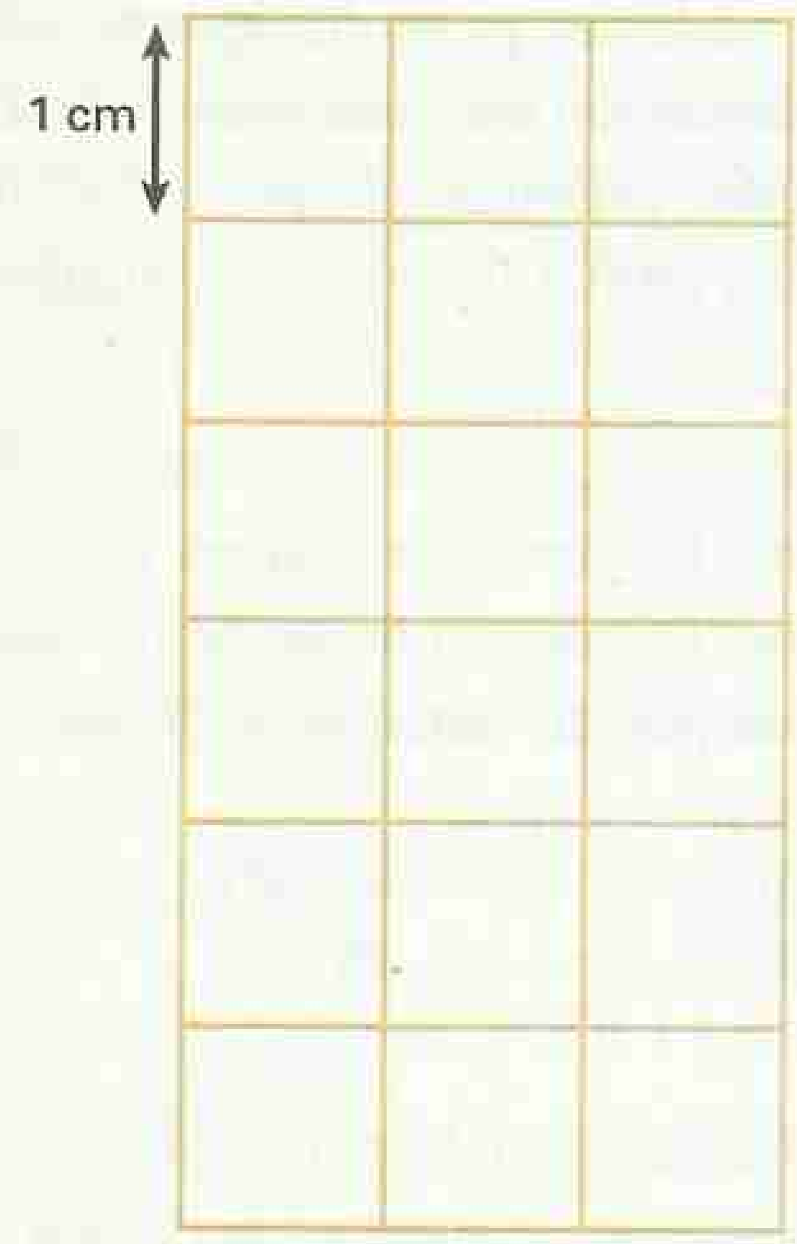
a) 2
b) 5
c) 6
d) 3
e) 4

C.32 Seis retas paralelas distintas de um plano se interceptam com outras cinco retas paralelas distintas desse plano (conforme figura). Calcule o número de paralelogramos cujos lados estão contidos nessa rede.



Sugestão. Um paralelogramo fica determinado por qualquer escolha de duas dentre essas cinco retas paralelas e duas dentre as outras seis retas paralelas.

C.33 (UFPI) A figura apresenta um retângulo dividido em quadradinhos de lado 1 cm.



O número de maneiras distintas de colorir seis desses quadradinhos, sendo exatamente dois em cada coluna e um em cada linha, é:

a) 15
b) 30
c) 60
d) 90
e) 120

Capítulo 44

BINÔMIO DE NEWTON

1. NÚMERO BINOMIAL

Como vimos anteriormente, o número de combinações de n elementos tomados p a p é indicado pelo símbolo $C_{n,p}$. A partir de agora, indicaremos esse número também pelo símbolo $\binom{n}{p}$. Essa nova notação pode também ser lida como "número binomial de numerador n e denominador p" ou, simplesmente, "número binomial n sobre p". Assim sendo, temos:

$$\binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{para } \{n, p\} \subset \mathbb{N}, p \leq n$$

Exemplos

a) $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} = 10$

b) $\binom{4}{0} = \dfrac{4!}{0!(4-0)!} = \dfrac{\cancel{4!}}{0!\cancel{4!}} = 1$

c) $\binom{0}{0} = \dfrac{0!}{0!(0-0)!} = \dfrac{0!}{0!0!} = 1$

2. TEOREMA DE NEWTON PARA O DESENVOLVIMENTO DA POTÊNCIA $(x + a)^n$

Para resolver certos problemas de matemática, necessitamos de potências do tipo $(x + a)^n$, em que x e a são números quaisquer e $n \in \mathbb{N}$. Algumas dessas potências são:

$(x + a)^0 = 1$ $\qquad$ $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$

$(x + a)^1 = x + a$ $\qquad$ $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

Note que, quanto maior for o expoente, mais trabalhosos serão os cálculos. No entanto, usando os conceitos que aprendemos com a análise combinatória, podemos deduzir uma expressão, relativamente simples, para desenvolver essas potências.

Consideremos a potência $(x + a)^5$. Para desenvolvê-la, devemos efetuar as seguintes multiplicações:

$$(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)$$

Aplicando a propriedade distributiva, vamos multiplicar, de todas as maneiras possíveis, cinco fatores (x ou a), escolhendo cada um deles em um dos fatores $(x + a)$ dessa expressão. Uma das possibilidades é:

$$(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)(x + a) \to x^3a^2$$

Através dessa possibilidade obtemos o termo x^3a^2. Porém, existem outras possibilidades que resultam no termo x^3a^2. Por exemplo:

$$(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)(x + a) \to x^3a^2$$

Quantos termos iguais a x^3a^2 serão obtidos depois de efetuadas todas as multiplicações possíveis?

Para responder a essa pergunta, recorreremos à análise combinatória. Devemos calcular o número de modos diferentes de escolher: x em três dos cinco fatores $(x + a)$; e a nos outros dois. Note que, escolhido x em três fatores, a escolha de a fica automaticamente determinada nos fatores restantes. Assim, basta calcularmos o número de maneiras diferentes de escolher x em três dos cinco fatores. Esse número é $C_{5,3}$. Portanto, o termo x^3a^2 aparecerá $C_{5,3}$ vezes depois de efetuadas todas as multiplicações.

Raciocinando de maneira análoga, temos que:

- o termo x^5 aparecerá $C_{5,5}$ vezes;
- o termo x^4a aparecerá $C_{5,4}$ vezes;
- o termo x^2a^3 aparecerá $C_{5,2}$ vezes;
- o termo xa^4 aparecerá $C_{5,1}$ vezes;
- o termo a^5 aparecerá $C_{5,0}$ vezes.

Assim, podemos escrever:

$$(x + a)^5 = C_{5,5}x^5 + C_{5,4}x^4a + C_{5,3}x^3a^2 + Z + \\ + C_{5,2}x^2a^3 + C_{5,1}xa^4 + C_{5,0}a^5$$

ou seja:

$$(x + a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

Generalização

O matemático, físico e astrônomo inglês *sir* Isaac Newton demonstrou que:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \\ + \ldots + \binom{n}{p}x^pa^{n-p} + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

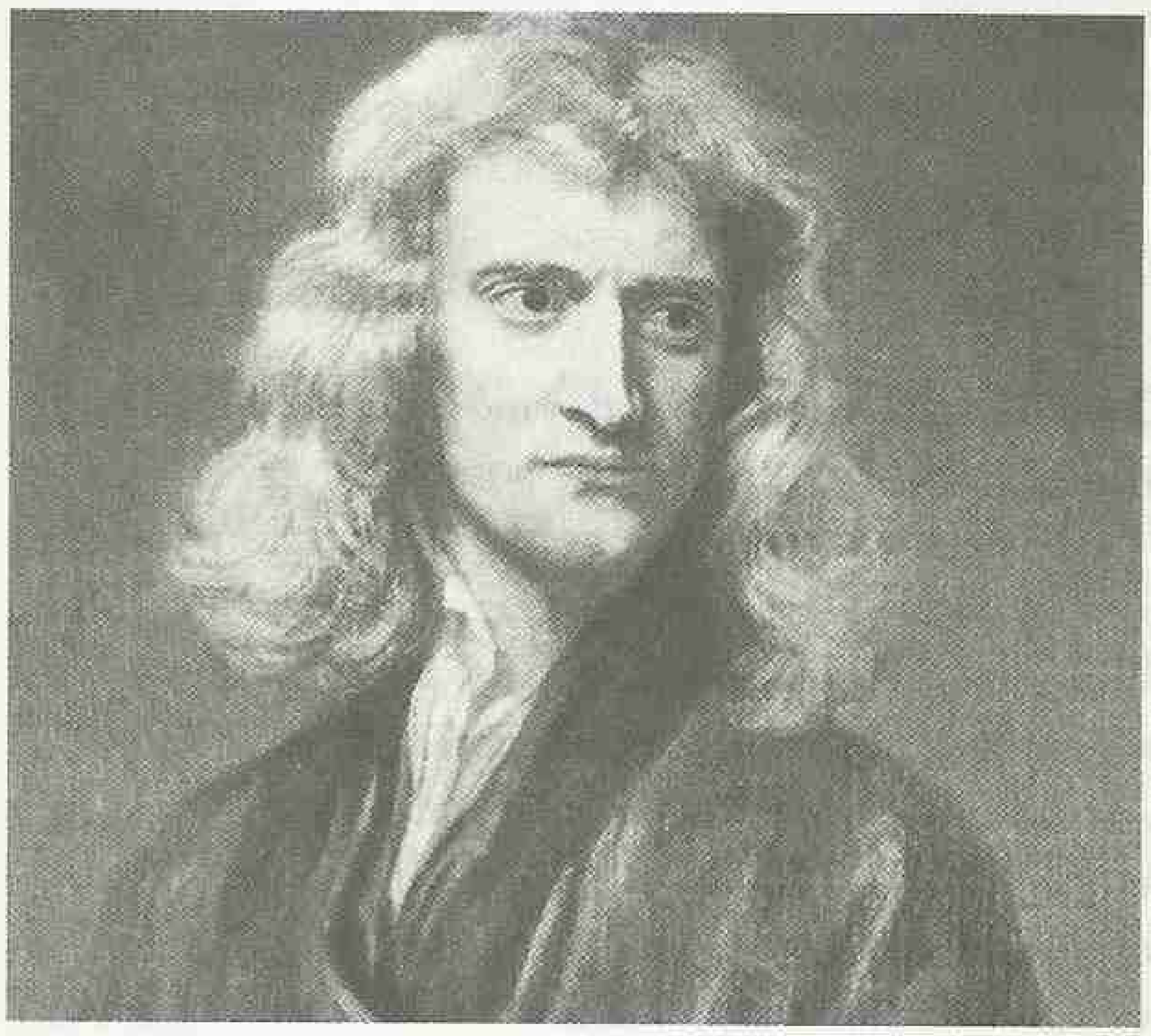
em que x e a são números quaisquer e $n \in \mathbb{N}$.

Nota

Como $(x + a)^n = (a + x)^n$, o teorema de Newton pode ser apresentado sob a seguinte forma:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^na^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \\ + \ldots + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + \ldots + \binom{n}{n}x^0a^n$$

Isto é, segundo expoentes decrescentes de x.



Isaac Newton (1642-1727), físico, astrônomo e matemático inglês. Criador do cálculo diferencial e integral.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Desenvolver a potência $(x + a)^4$.

Resolução

Pelo teorema de Newton, temos que:

$$(x + a)^4 = \binom{4}{0}x^0a^4 + \binom{4}{1}x^1a^3 + \binom{4}{2}x^2a^2 + \\ + \binom{4}{3}x^3a + \binom{4}{4}x^4a^0$$

Calculando os coeficientes binomiais, concluímos:

$$(x + a)^4 = a^4 + 4xa^3 + 6x^2a^2 + 4x^3a + x^4$$

R.2 Desenvolver a potência $(2x + y^3)^5$.

Resolução

$$(2x + y^3)^5 = \binom{5}{0}(2x)^0(y^3)^5 + \binom{5}{1}(2x)^1(y^3)^4 + \\ + \binom{5}{2}(2x)^2(y^3)^3 + \binom{5}{3}(2x)^3(y^3)^2 + \\ + \binom{5}{4}(2x)^4(y^3)^1 + \binom{5}{5}(2x)^5(y^3)^0$$

Calculando os coeficientes binomiais, temos:

$$(2x + y^3)^5 = y^{15} + 5 \cdot 2xy^{12} + 10 \cdot 4x^2y^9 + \\ + 10 \cdot 8x^3y^6 + 5 \cdot 16x^4y^3 + 32x^5$$

Portanto, concluímos que:

$$(2x + y^3)^5 = y^{15} + 10xy^{12} + 40x^2y^9 + 80x^3y^6 + \\ + 80x^4y^3 + 32x^5$$

R.3 Desenvolver a potência $(x - 2a)^4$.

Resolução

Para desenvolver essa potência, vamos considerá-la sob a seguinte forma $[x + (-2a)]^4$.

Assim, temos que:

$$[x + (-2a)]^4 = \binom{4}{0}x^0(-2a)^4 + \\ + \binom{4}{1}x^1(-2a)^3 + \binom{4}{2}x^2(-2a)^2 + \\ + \binom{4}{3}x^3(-2a)^1 + \binom{4}{4}x^4(-2a)^0$$

Logo:

$$(x - 2a)^4 = 16a^4 - 4x \cdot 8a^3 + \\ + 6x^2 \cdot 4a^2 - 4x^3 \cdot 2a + x^4$$

Portanto $(x - 2a)^4 = 16a^4 - 32xa^3 + 24x^2a^2 - 8x^3a + x^4$.

R.4 Resolver o seguinte sistema, onde x e y são números reais:

$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + y^5 = -1 \end{cases}$$

Resolução

A segunda equação desse sistema pode ser escrita sob a forma $(x + y)^5 = -1$.

Logo, temos:

$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ (x + y)^5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + y = -1 \end{cases} -$$

$$x = -2$$

Fazendo $x = -2$ na equação $x + y = -1$, temos:

$$-2 + y = -1 \therefore y = 1$$

Logo, $x = -2$ e $y = 1$.

R.5 Calcular o valor da expressão:

$$E = \binom{5}{0}2^0 \cdot 3^5 + \binom{5}{1}2^1 \cdot 3^4 + \binom{5}{2}2^2 \cdot 3^3 + \\ + \binom{5}{3}2^3 \cdot 3^2 + \binom{5}{4}2^4 \cdot 3^1 + \binom{5}{5}2^5 \cdot 3^0$$

Resolução

Comparando essa expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \\ + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

temos que $E = (2 + 3)^5 = 5^5 = 3.125$.

R.6 Calcular o valor da expressão:

$$E = \binom{4}{0}3^0 + \binom{4}{1}3^1 + \binom{4}{2}3^2 +$$

$$+ \binom{4}{3}3^3 + \binom{4}{4}3^4$$

Resolução

Multiplicando cada parcela por 1^{n-p}, em que n é o numerador e p é o denominador do respectivo coeficiente binomial, temos que:

$$E = \binom{4}{0}3^0 \cdot 1^4 + \binom{4}{1}3^1 \cdot 1^3 + \binom{4}{2}3^2 \cdot 1^2 +$$

$$+ \binom{4}{3}3^3 \cdot 1^1 + \binom{4}{4}3^4 \cdot 1^0$$

Comparando essa expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} +$$

$$+ \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

temos que $E = (3 + 1)^4 = 4^4 = 256$.

Somatório

Durante o estudo das progressões, vimos que o símbolo Σ (letra grega denominada "sigma") é utilizado nas ciências exatas para indicar um somatório.

Exemplo

A expressão $\sum_{p=0}^{3}\binom{6}{p}2^p$ deve ser lida "somatório de $\binom{6}{p}2^p$ com p variando no conjunto dos números naturais de 0 a 3".

Atribuindo a p os valores 0, 1, 2 e 3, temos que:

$$\sum_{p=0}^{3}\binom{6}{p}2^p = \binom{6}{0}2^0 + \binom{6}{1}2^1 + \binom{6}{2}2^2 +$$

$$+ \binom{6}{3}2^3 = 1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 20 \cdot 8 = 233$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.7 Provar que $\sum_{p=0}^{50}\binom{50}{p}2^p = 3^{50}$.

Resolução

$$\sum_{p=0}^{50}\binom{50}{p}2^p = \binom{50}{0}2^0 + \binom{50}{1}2^1 +$$

$$+ \binom{50}{2}2^2 + \ldots + \binom{50}{50}2^{50}$$

Multiplicando cada parcela dessa soma por 1^{n-p}, em que n é o numerador e p é o denominador do respectivo coeficiente binomial, temos que:

$$\sum_{p=0}^{50}\binom{50}{p}2^p = \sum_{p=0}^{50}\binom{50}{p}2^p \cdot 1^{50-p} =$$

$$= \binom{50}{0}2^0 \cdot 1^{50} + \binom{50}{1}2^1 \cdot 1^{49} +$$

$$+ \binom{50}{2}2^2 \cdot 1^{48} + \ldots + \binom{50}{50}2^{50} \cdot 1^0$$

Comparando essa última expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} +$$

$$+ \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

percebemos que $\sum_{p=0}^{50}\binom{50}{p}2^p = (2 + 1)^{50} = 3^{50}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Dois números binominais que têm o mesmo numerador e cuja soma dos denominadores é igual ao numerador comum são chamados de **números binomiais complementares**. Por exemplo, os binomiais $\binom{6}{4}$ e $\binom{6}{2}$ são complementares.

a) Calcule o valor de $\binom{7}{4}$ e o de seu complementar.

b) Calcule o valor de $\binom{n}{p}$ e o de seu complementar.

Que relação existe entre os valores encontrados?

B.2 Aplique o teorema de Newton para desenvolver as potências:

a) $(x + a)$ b) $(2x + 3)^3$ c) $(2x + y^2)^4$

B.3 Desenvolva as potências:

a) $(x - a)^5$ b) $(2 - x^2)^4$ c) $(2x^4 - 3y)^3$

B.4 (UFPR) Determine os números reais x e y tais que:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + y^5 = 243 \end{cases}$$

B.5 Determine os números reais x e y de modo que:

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x^4 - \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 - \binom{4}{3}xy^3 + y^4 = 16 \end{cases}$$

B.6 Calcule o valor da expressão:

$$E = \binom{4}{0}2^0 \cdot 3^4 + \binom{4}{1}2^1 \cdot 3^3 + $$
$$+ \binom{4}{2}2^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3}2^3 \cdot 3^1 + \binom{4}{4}2^4 \cdot 3^0$$

Sugestão. Compare essa expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} +$$
$$+ \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

B.7 Qual é o valor da expressão:

$$E = \binom{5}{0}2^0 + \binom{5}{1}2^1 + \binom{5}{2}2^2 +$$
$$+ \binom{5}{3}2^3 + \binom{5}{4}2^4 + \binom{5}{5}2^5?$$

Sugestão. Multiplique cada parcela por 1^{n-p}, em que n é o numerador e p é o denominador do respectivo coeficiente binomial.

B.8 Efetue:

$$E = \binom{5}{0}2^5 - \binom{5}{1}2^4 + \binom{5}{2}2^3 - \binom{5}{3}2^2 +$$
$$+ \binom{5}{4}2^1 - \binom{5}{5}2^0$$

B.9 Se $S = \sum_{p=0}^{20} \binom{20}{p}2^p$, então:

a) $S = 2^{40}$
b) $S = 9^{10}$
c) $S = 2^{22}$
d) $S = 20^{20}$
e) $S = 20!$

Sugestão. Multiplique cada parcela $\binom{20}{p}2^p$ por 1^{20-p}. Como $1^{20-p} = 1$, $\forall\, p$, tais operações não alterarão a expressão S.

B.10 A expressão $\sum_{p=2}^{20} \binom{20}{p}5^p$ é igual a:

a) 6^{20}
b) $6^{20} - 7$
c) $6^{20} - 101$
d) 5^{20}
e) $5^{20} - 21$

Exercícios complementares de C.1 a C.7

3. TERMO GERAL DO BINÔMIO DE NEWTON

Vimos que:

$$(x + a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^pa^{n-p}, \text{ isto é:}$$

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} +$$
$$+ \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{p}x^pa^{n-p} + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

Observe que todas as parcelas do desenvolvimento são da forma $\binom{n}{p}x^pa^{n-p}$ com $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p \leq n$. Por isso chamamos de **termo geral do binômio de Newton** a expressão:

$$T = \binom{n}{p}x^pa^{n-p}$$

Nota

Como $(x + a)^n = (a + x)^n$, temos que o termo geral do binômio de Newton pode ser escrito também sob a seguinte forma:

$$T = \binom{n}{p}x^{n-p}a^p$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.8 Determinar o coeficiente do termo em x^{12} no desenvolvimento de $(x^3 + 2)^6$.

Resolução

O termo geral do desenvolvimento do binômio é:

$$T = \binom{6}{p}(x^3)^p \cdot 2^{6-p} \quad \therefore T = \binom{6}{p}x^{3p} \cdot 2^{6-p}$$

Queremos o coeficiente de x^{12}. Então devemos encontrar o valor de p para que o expoente de x seja 12, isto é:

$$3p = 12 \Rightarrow p = 4$$

Fazendo $p = 4$ no termo geral, temos que:

$$T = \binom{6}{4}x^{3 \cdot 4} \cdot 2^{6-4} \Rightarrow T = \binom{6}{4}x^{12} \cdot 2^2 \text{ em que}$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

Logo, $T = 15x^{12} \cdot 4 \Rightarrow T = 60x^{12}$.
Assim, o coeficiente de x^{12} é 60.

Nota

Escrevemos o termo geral $T = \binom{6}{p}(x^3)^p \cdot 2^{6-p}$ segundo expoentes crescentes de x; poderíamos ter formado o termo geral segundo expoentes decrescentes de x, isto é, $T = \binom{6}{p}2^p(x^3)^{6-p}$, e obtido o mesmo resultado; faça você mesmo os cálculos.

R.9 Determinar o coeficiente do termo em x^{19} no desenvolvimento de $(x^3 - 2x^2)^8$.

Resolução

Para montarmos o termo geral, devemos considerar o binômio sob a forma $[x^3 + (-2x^2)]^8$. Assim, temos como termo geral:

$$T = \binom{8}{p}(-2x^2)^p(x^3)^{8-p}$$
$$\therefore\ T = \binom{8}{p}(-2)^px^{2p}x^{24-3p}$$
$$\therefore\ T = \binom{8}{p}(-2)^px^{24-p}$$

Queremos o coeficiente de x^{19}, então devemos encontrar o valor de p para que o expoente de x seja 19, isto é, $24 - p = 19 \Rightarrow p = 5$.

Fazemos $p = 5$ no termo geral:

$$T = \binom{8}{5}(-2)^5 x^{24-5} \quad \therefore \quad T = \binom{8}{5}(-2)^5 x^{19}$$

em que

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ e } (-2)^5 = -32$$

Logo, $T = 56(-32)x^{19} = -1.792x^{19}$.
Assim, o coeficiente de x^{19} é -1.792.

R.10 Determinar o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4 + \frac{1}{x^3}\right)^7$.

Resolução
Para facilitar os cálculos, convém considerarmos o binômio sob a forma $(x^4 + x^{-3})^7$.
Seu termo geral é:

$$T = \binom{7}{p}(x^{-3})^p(x^4)^{7-p} \quad \therefore \quad T = \binom{7}{p}x^{-3p}x^{28-4p}$$

$$\therefore \quad T = \binom{7}{p}x^{28-7p}$$

Queremos o termo independente de x, isto é, o coeficiente de x^0. Assim sendo, para obter o valor de p de modo que o termo T não dependa de x, basta igualarmos a zero o expoente de x, isto é:

$$28 - 7p = 0 \Rightarrow p = 4$$

Fazendo $p = 4$ no termo geral, temos que:

$$T = \binom{7}{4}x^{28-7\cdot 4} \quad \therefore \quad T = \binom{7}{4}x^0$$

$$\therefore \quad T = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} =$$

$$= \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

Portanto, o termo independente de x é 35.

R.11 Desenvolvendo a potência $(2x + 1)^{10}$, segundo expoentes crescentes de x, determinar o quarto termo.

Resolução
Lembremos que o termo geral pode ser apresentado sob duas formas:
segundo expoentes crescentes de x,

$$T = \binom{10}{p}(2x)^p \cdot 1^{10-p}$$

ou segundo expoentes decrescentes de x

$$T = \binom{10}{p}(2x)^{10-p} \cdot 1^p$$

Nesse caso, o problema exige a primeira forma, isto é:

$$T = \binom{10}{p}(2x)^p \cdot 1^{10-p} \quad \therefore \quad T = \binom{10}{p}2^p x^p \cdot 1^{10-p}$$

Queremos o quarto termo do desenvolvimento. Para obter o valor de p, basta observarmos que $p = 0$ corresponde ao primeiro termo; $p = 1$ corresponde ao segundo termo; $p = 2$ corresponde ao terceiro termo; $p = 3$ corresponde ao quarto termo.
Portanto, fazendo $p = 3$ no termo geral:

$$T = \binom{10}{3}2^3x^3 \cdot 1^{10-3} \quad \therefore \quad T = \binom{10}{3}2^3x^3$$

em que

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{7!}} = 120 \text{ e } 2^3 = 8$$

Logo, $T = 120 \cdot 8x^3 = 960x^3$.
Assim, o quarto termo é $960x^3$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.11 Qual é o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento de $(x^2 + 1)^6$?

B.12 Qual é o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$? **Sugestão.** Escreva a expressão sob a forma $(x + x^{-1})^8$.

B.13 (UECE) O coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(\sqrt[3]{x} + 2)^8$ é:
a) 112
b) 140
c) 168
d) 224

Sugestão. Escreva a expressão sob a forma $\left(x^{\frac{1}{3}} + 2\right)^8$.

B.14 (U. E. Londrina-PR) Se um dos termos do desenvolvimento do binômio $(x + a)^5$, com $a \in \mathbb{R}$, é $80x^2$, então o valor de a é:
a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

B.15 (U. Taubaté-SP) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ é:
a) 10
b) 30
c) 40
d) 16
e) 20

B.16 Encontre o termo que não depende de x no desenvolvimento de $\left(\sqrt[4]{x} - \frac{2}{x}\right)^{10}$.
Sugestão. Escreva a expressão sob a forma
$[x^{\frac{1}{4}} + (-2x^{-1})]^{10}$

B.17 Escrevendo o desenvolvimento do binômio $(x^2 - 2)^8$ segundo expoentes crescentes de x, determine o sexto termo.

B.18 (Mackenzie-SP) No desenvolvimento de $(\sqrt{2} + x)^6$ segundo expoentes crescentes de x, o termo central é:
a) $10x^2$
b) $40x^3$
c) $40\sqrt{2}\,x^3$
d) $12x^3$
e) $20x^3$

Exercícios complementares de C.8 a C.13

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Dois números binomiais de mesmo numerador são iguais se, e somente se, têm o mesmo denominador ou são complementares, isto é:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{k} \Leftrightarrow p = n \text{ ou } p + k = n$$

De acordo com essa propriedade, determine x em cada uma das equações:

a) $\binom{9}{x} = \binom{9}{7}$ b) $C_{8,\,(x+3)} = C_{8,\,(x+1)}$

C.2 Obtenha a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(3x - y)^{10}$. **Sugestão**. Basta fazer $x = y = 1$. (Pense o porquê.)

C.3 Calcule a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x + y)^8$.

C.4 (U. E. Londrina-PR) Se a soma dos coeficientes do desenvolvimento do binômio $(2x + y)^n$ é igual a 243, então o número n é:

a) 12 b) 10 c) 8 d) 5 e) 3

C.5 (Unifor-CE) A soma de números binomiais

$$\binom{100}{0} + \binom{100}{1} + \binom{100}{2} + \ldots + \binom{100}{99} + \binom{100}{100}$$

é igual a:

a) 2^{11} c) 100^0 e) 100^{100}
b) 2^{100} d) 100^2

Sugestão. Multiplique cada parcela $\binom{100}{p}$ por $1^p \cdot 1^{100-p}$, com o quê a expressão não se altera.

C.6 Calcule, em função de n, o valor do somatório $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$, em que n e p são números naturais com $n \geqslant p$.

Sugestão. Desenvolva o somatório, obtendo:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

e raciocine como no exercício anterior.

C.7 (UFPR) O valor de n de modo que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 1.024 \text{ é:}$$

a) 5 b) 8 c) 10 d) 11 e) 12

C.8 Determine o coeficiente do termo em x^4 no desenvolvimento de $(x + 2)^7(x - 2)^7$.
Sugestão. $(x + 2)^7(x - 2)^7 = [(x + 2)(x - 2)]^7$.

C.9 Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$.

C.10 Mostre que o desenvolvimento de $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{11}$ não possui o termo independente de x.

Sugestão. Escreva o binômio na forma $\left(x + 2x^{-\frac{1}{2}}\right)^{11}$.

C.11 (U. F. Santa Maria-RS) O valor de K, $K \neq 0$, para que o coeficiente do termo x^2, no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{K}\right)^5$, seja igual a 80, é:

a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{5}{2}$
b) 1 d) 2

C.12 (Unirio) No desenvolvimento de $(x + y)^n$, segundo expoentes crescentes de x, a diferença entre os coeficientes do 3º e do 2º termo, nessa ordem, é igual a 54. Podemos afirmar que o termo médio é o:

a) 3º b) 4º c) 5º d) 6º e) 7º

C.13 Desenvolvendo a potência $(x^3 + 2)^6$ segundo expoentes decrescentes de x, determine o quarto termo.

Capítulo 45

PROBABILIDADE

1. CONCEITUAÇÃO

Um automóvel será sorteado dentre os clientes de um *shopping center*. Paulo depositou 50 cupons em uma das urnas espalhadas pelo *shopping*, e Janete depositou 20 cupons. Hoje, dia do sorteio, os conteúdos de todas as urnas foram juntados, formando uma pilha de 10.000 cupons. Um representante do *shopping* vai sortear um cupom.

É possível **medir** a possibilidade de cada um ganhar o automóvel. Como Paulo tem 50 cupons dentre os 10.000 que participam do sorteio, indicamos por $\frac{50}{10.000}$ a **medida** da possibilidade de Paulo ganhar; analogamente, a medida da possibilidade de Janete ganhar é $\frac{20}{10.000}$.

As frações $\frac{50}{10.000}$ e $\frac{20}{10.000}$ são chamadas de **probabilidades** de Paulo e Janete ganharem, respectivamente.

Esse exemplo ajuda a entender que **probabilidade** é um número que mede a possibilidade de ocorrer, ou não, um resultado.

Experimento aleatório

Todo experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso é chamado de **experimento aleatório**.

Exemplos

a) **O lançamento de uma moeda** em que se considera como resultado a face voltada para cima é um experimento aleatório.

b) **O lançamento de um dado** em que se considera como resultado o número de pontos da face voltada para cima é um experimento aleatório.

Espaço amostral de um experimento aleatório

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de **espaço amostral** desse experimento.

Exemplos

a) No lançamento de uma moeda o espaço amostral é o conjunto $E = \{\text{cara, coroa}\}$.

b) No lançamento de um dado, o espaço amostral é o conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Evento de um espaço amostral

Qualquer subconjunto de um espaço amostral é chamado de **evento** desse espaço.

Exemplos

a) No lançamento de uma moeda, em que o espaço amostral é $E = \{\text{cara, coroa}\}$, o conjunto $A = \{\text{cara}\}$ é um **evento** de E.

b) No lançamento de um dado, em que o espaço amostral é $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ é um **evento** de E.

Espaço amostral equiprovável

Um dado foi lançado 1.000 vezes. O número de vezes que ocorreu cada face é chamado de **freqüência absoluta** dessa face; e a razão da **freqüência absoluta** para o número de vezes que foi realizado o experimento é chamada de **freqüência relativa** dessa face. A tabela a seguir descreve o que ocorreu nesses 1.000 lançamentos.

Face	Freqüência absoluta	Freqüência relativa
1	165	$\frac{165}{1.000} = 0{,}165$
2	168	$\frac{168}{1.000} = 0{,}168$
3	165	$\frac{165}{1.000} = 0{,}165$
4	163	$\frac{163}{1.000} = 0{,}163$
5	169	$\frac{169}{1.000} = 0{,}169$
6	170	$\frac{170}{1.000} = 0{,}170$
	Freqüência total = 1.000	

Observe que as freqüências relativas são valores muito próximos um do outro. Se aumentássemos o número de lançamentos do dado para 2.000, 3.000, 10.000 etc., as freqüências relativas se aproximariam cada vez mais, tendendo a ficar iguais. Por isso, dizemos que o espaço amostral em um lançamento desse dado é **equiprovável**.

Um espaço amostral é equiprovável se as freqüências relativas de seus elementos tendem a um mesmo valor quando o número de experimentos aumenta indefinidamente.

2. DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

Sejam E um espaço amostral equiprovável, finito e não-vazio, e A um evento de E. A probabilidade de ocorrer algum elemento de A é indicada por $P(A)$ e definida por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

em que $n(A)$ e $n(E)$ indicam, respectivamente, o número de elementos de A e de E.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 No lançamento de uma moeda, qual é a probabilidade de se obter cara na face voltada para cima?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é
$E = \{\text{cara, coroa}\}$, e queremos que ocorra o elemento do evento $A = \{\text{cara}\}$. Como $n(A) = 1$ e $n(E) = 2$, temos, por definição:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{1}{2}$$

Podemos, também, dar a probabilidade sob forma de porcentagem, isto é, $P(A) = 50\%$.

R.2 No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter, na face voltada para cima, um número de pontos menor que 5?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

e queremos que ocorra algum elemento do evento $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Como $n(B) = 4$ e $n(E) = 6$, temos, por definição:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}} = \frac{2}{3}$$

R.3 No lançamento de dois dados, qual é a probabilidade de que a soma dos pontos das faces voltadas para cima seja igual a 5?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é o conjunto de todos os pares ordenados de números naturais (x, y) em que $1 \leqslant x \leqslant 6$ e $1 \leqslant y \leqslant 6$. O número de elementos desse espaço amostral pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem. Observe:

$$\begin{array}{r} (x\ ,\ y) \\ \downarrow\ \ \downarrow \\ \textbf{números de possibilidades} \rightarrow 6 \times 6 = 36 \end{array}$$

A representação desse espaço amostral é:

$$E = \left\{ \begin{array}{lllll} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \ldots\ldots & (1, 6) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \ldots\ldots & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & \ldots\ldots & (3, 6) \\ \quad\cdot & \quad\cdot & \quad\cdot & \ldots\ldots & \quad\cdot \\ (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & \ldots\ldots & (6, 6) \end{array} \right\}$$

Queremos que ocorra algum elemento do evento:

$$A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

Como $n(A) = 4$ e $n(E) = 36$, temos por definição:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{36}} = \frac{1}{9}$$

Nota

Para entender que há duas maneiras diferentes de se obter uma face 2 e outra face 3, pinte um dado de vermelho e o outro de azul. O resultado "face 2 no dado vermelho e face 3 no azul" é diferente do resultado "face 2 no dado azul e face 3 no vermelho", pois as faces voltadas para cima, no primeiro caso, não são as mesmas voltadas para cima no segundo. Por isso, consideramos os pares (2, 3) e (3, 2).

Quem não arrisca...

Você já deve ter se aventurado em um jogo de loteria. Continue acreditando em sua sorte, mas, conheça antes suas chances de ficar rico.

A quina é uma modalidade de jogo de apostas cujo resultado é formado por 5 dezenas, em qualquer ordem, sorteadas dentre 80 dezenas. O apostador assinala um mínimo de 5 e um máximo de 8 dezenas, em um cartão com 80 dezenas. O número de cartões que podem ser formados com a aposta mínima é $C_{80,\,5} = 24.040.016$. Logo, a probabilidade de serem sorteadas as dezenas de um cartão com a aposta mínima é $\frac{1}{24.040.016} \simeq 0{,}000000041$.

Na mega-sena o resultado é formado por 6 dezenas sorteadas dentre 60 dezenas. O apostador assinala um mínimo de 6 e um máximo de 15 dezenas, em um cartão com 60 dezenas. O número de cartões que podem ser formados com a aposta mínima é $C_{60,\,6} = 50.063.860$. Logo, a probabilidade de serem sorteadas as dezenas de um cartão com a aposta mínima é $\frac{1}{50.063.860} \simeq 0{,}000000019$.

Tendo como referência esses dois exemplos, calcule você mesmo a probabilidade de ganhar em cada uma das outras loterias oficiais.

Propriedades

Sendo E um espaço amostral equiprovável, finito e não-vazio, e A um evento de E, tem-se que:

I) $P(\varnothing) = 0$

$$\text{pois } P\,\varnothing = \frac{n(\varnothing)}{n(E)} = \frac{0}{n(E)} = 0$$

Nota

O evento $\varnothing$ é chamado de **evento impossível**.

II) $P(E) = 1$

$$\text{pois } P(E) = \frac{n(E)}{n(E)} = 1$$

Nota

O evento E, que coincide com o próprio espaço amostral, é chamado de **evento certo**.

III) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

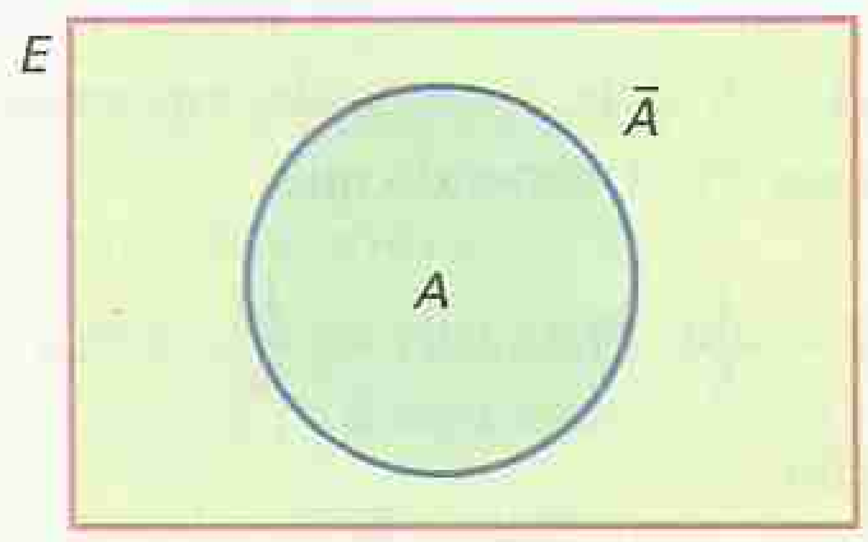
pois $\varnothing \subset A \subset E \Rightarrow n(\varnothing) \leqslant n(A) \leqslant n(E)$

$$\therefore \frac{n(\varnothing)}{n(E)} \leqslant \frac{n(A)}{n(E)} \leqslant \frac{n(E)}{n(E)}$$

$$\therefore 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

IV) Sendo $\overline{A}$ o conjunto dos elementos de E que não pertencem a A, tem-se que:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$



pois, como $A \cup \overline{A} = E$ e $A \cap \overline{A} = \varnothing$, tem-se que:

$$n(A) + n(\overline{A}) = n(E)$$

$$\therefore \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(\overline{A})}{n(E)} = \frac{n(E)}{n(E)}$$

$$\therefore P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Nota

O evento $\overline{A}$ é chamado de **complementar** de A.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Uma urna contém bolas coloridas. Retirando-se uma bola dessa urna, a probabilidade de se obter uma bola vermelha é 0,64. Qual é a probabilidade de se obter uma bola que não seja vermelha?

Resolução

Indicando por A o evento formado pelas bolas vermelhas, o **complementar** de A é o evento $\overline{A}$ formado pelas bolas não vermelhas. Sabemos que:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Logo:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
$$\therefore P(\overline{A}) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$$

Temos, portanto, que a probabilidade de se obter uma bola que não seja vermelha é 0,36.

R.5 Uma urna contém apenas bolas brancas e bolas azuis. Retirando-se, ao acaso, uma bola da urna, a probabilidade de se obter uma bola azul é o quádruplo da probabilidade de se obter uma bola branca. Qual é a probabilidade de se obter uma bola branca?

Resolução

Sendo os eventos $A = \{x \mid x \text{ é bola azul da urna}\}$ e $B = \{y \mid y \text{ é bola branca da urna}\}$, temos que $P(A) = 4P(B)$. Como a urna contém apenas bolas brancas e bolas azuis, temos que A e B são eventos complementares, portanto $P(A) + P(B) = 1$. Assim, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} P(A) = 4P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{cases}$$

obtemos $P(B) = \dfrac{1}{5}$, ou seja, a probabilidade de se obter uma bola branca é $\dfrac{1}{5}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 (UNOPAR) A probabilidade de você ganhar uma bicicleta numa rifa de 100 números da qual você comprou quatro números é:

a) $\dfrac{2}{5}$ b) $\dfrac{1}{10}$ c) $\dfrac{1}{25}$ d) $\dfrac{1}{30}$ e) $\dfrac{1}{50}$

B.2 Uma urna contém exatamente cem etiquetas numeradas de 1 a 100. Retirando uma etiqueta dessa urna, qual é a probabilidade de obtermos um número menor do que 41?

B.3 (U. E. Londrina-PR) No lançamento de duas moedas, a probabilidade de se obter pelo menos uma cara é:

a) 50% b) 100% c) 25% d) 75% e) 33%

B.4 No lançamento de dois dados, calcule a probabilidade de se obter nas faces voltadas para cima:

a) soma dos pontos igual a 7.
b) soma dos pontos igual a 6.
c) soma dos pontos igual a 13.
d) soma dos pontos menor que 5.
e) soma dos pontos menor que 13.

B.5 (Osec-SP) Lançando-se dois dados, a probabilidade de ocorrer a face com 5 pontos em pelo menos um dos dados é:

a) $\dfrac{11}{36}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{5}{18}$ d) $\dfrac{1}{6}$ e) $\dfrac{1}{36}$

B.6 (Cesgranrio) Sorteando-se um número inteiro n, $1 \leqslant n \leqslant 999$, a probabilidade de se obter um múltiplo de 9 é:

a) $\dfrac{1}{999}$ b) $\dfrac{1}{10}$ c) $\dfrac{2}{9}$ d) $\dfrac{1}{3}$ e) $\dfrac{1}{9}$

B.7 No lançamento de três dados, qual é a probabilidade de obtermos números iguais de pontos nos três dados?

B.8 Uma moeda é lançada três vezes. Qual a probabilidade de obtermos cara nos dois primeiros lançamentos e coroa no terceiro?

B.9 Lançando-se três vezes uma moeda, qual é a probabilidade de se obter cara nos dois primeiros lançamentos?

B.10 No lançamento de três moedas, qual é a probabilidade de se obter duas caras e uma coroa?

B.11 Uma comissão de três pessoas será escolhida dentre cinco pessoas, sendo apenas uma de nome Paulo. Qual é a probabilidade de Paulo participar da comissão?

B.12 Se num grupo de quinze homens e cinco mulheres sortearmos três pessoas, qual é a probabilidade de serem sorteados dois homens e uma mulher? **Sugestão**. Cada elemento do espaço amostral E é um conjunto de três pessoas escolhidas dentre as pessoas do grupo. Cada elemento do evento A que se deseja é um conjunto de três pessoas, sendo dois homens e uma mulher, escolhidos dentre as pessoas do grupo.

B.13 Ao atirar num alvo, a probabilidade de uma pessoa acertá-lo é $\frac{3}{5}$. Qual é a probabilidade de ela errar?

B.14 Uma caixa contém lâmpadas perfeitas e lâmpadas defeituosas. Escolhendo ao acaso três lâmpadas dessa caixa, a probabilidade de obtermos pelo menos uma lâmpada defeituosa é $\frac{17}{33}$. Qual é a probabilidade de retirarmos três lâmpadas perfeitas da caixa?

B.15 (PUC-SP) No lançamento de três dados, a probabilidade de não se obter nas três faces voltadas para cima o mesmo número de pontos é:

a) $\frac{1}{36}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{7}{36}$
d) $\frac{11}{36}$
e) $\frac{35}{36}$

B.16 A probabilidade de um cavalo vencer uma corrida é o triplo da probabilidade de perder. Qual é a probabilidade de que esse animal vença a corrida?

Exercícios complementares de C.1 a C.7

3. ADIÇÃO DE PROBABILIDADES

Teorema

Seja E um espaço amostral equiprovável finito e não-vazio. Para quaisquer eventos A e B de E, tem-se que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demonstração

Pelo princípio aditivo de contagem, temos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo por $n(E)$ ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

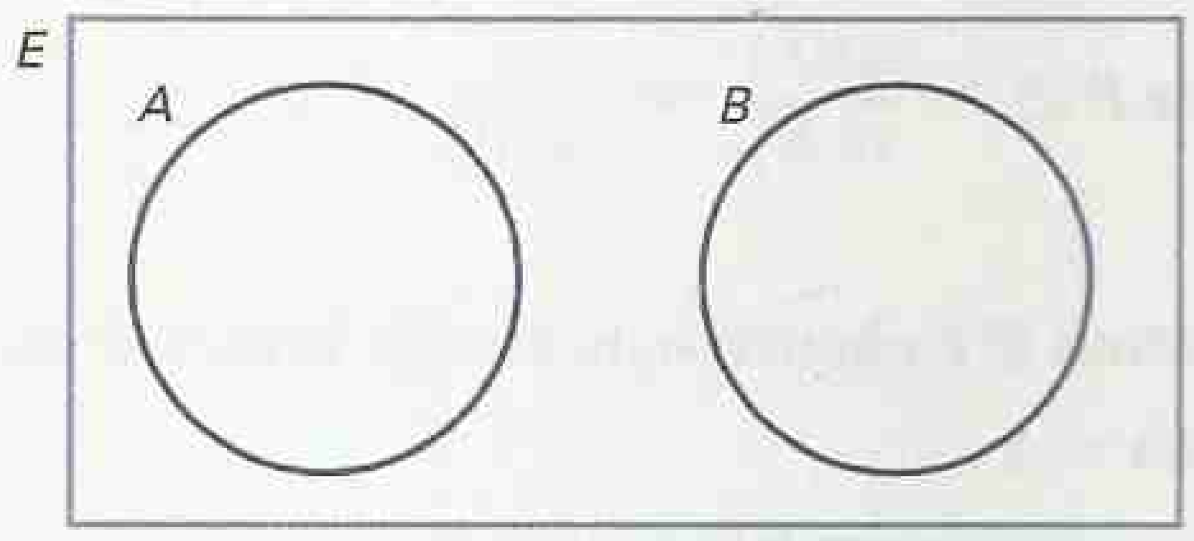
$$\frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(c.q.d.)

Eventos mutuamente exclusivos

Os eventos A e B são chamados de **mutuamente exclusivos** se, e somente se, $A \cap B = \varnothing$.



Nesse caso, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Nota

O **teorema da adição de probabilidades** é aplicado na resolução de problemas que pedem a probabilidade de ocorrer um evento A **ou** um evento B, pois o conectivo **ou** indica a união dos eventos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.6 Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral E. Determinar $P(A)$, sabendo que:

$$P(B) = \frac{1}{5},\ P(A \cup B) = \frac{11}{30} \text{ e } P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Resolução

Pelo teorema da adição de probabilidades, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\therefore \frac{11}{30} = P(A) + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

$$\therefore \frac{11}{30} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = P(A)$$

Logo, $P(A) = \frac{1}{3}$.

R.7 Sejam A e B dois eventos mutuamente exclusivos de um espaço amostral E. Determinar $P(A \cup B)$, sabendo que $P(A) = \frac{1}{5}$ e $P(B) = \frac{2}{7}$.

Resolução

Como A e B são mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \varnothing$, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} = \frac{17}{35}$$

R.8 Uma urna contém exatamente vinte bolas, numeradas de 1 a 20. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna. Qual é a probabilidade de se obter uma bola com um número múltiplo de 2 ou de 3?

Resolução

O espaço amostral do experimento é:

$$E = \{1, 2, 3, 4, ..., 20\} \therefore n(E) = 20$$

Consideremos dois eventos: um deles, caracterizado pela propriedade anterior ao conectivo **ou**, e o outro, caracterizado pela propriedade posterior ao conectivo **ou** do enunciado. Isto é:

$A = \{x \in E \mid x \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, ..., 20\}$
$\therefore n(A) = 10$
$B = \{y \in E \mid y \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, ..., 18\}$
$\therefore n(B) = 6$

Queremos a probabilidade de ocorrer algum elemento de A ou B, ou seja, $P(A \cup B)$. Para isso, precisamos de $A \cap B$:

$$A \cap B = \{6, 12, 18\} \therefore n(A \cap B) = 3$$

Logo, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$$

Nota
Sempre que a pergunta do problema for da forma "Qual é a probabilidade de ocorrer A **ou** B?", a resolução pode ser feita através do teorema:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

R.9 Uma urna contém cinco bolas vermelhas, três bolas azuis e quatro bolas brancas. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna. Qual é a probabilidade de sair uma bola vermelha ou uma bola azul?

Resolução
O espaço amostral é:

$$E = \{x \mid x \text{ é bola da urna}\} \ \therefore n(E) = 12$$

Consideremos dois eventos:

$A = \{y \in E \mid y \text{ é bola vermelha}\} \therefore n(A) = 5;$
$B = \{z \in E \mid z \text{ é bola azul}\} \therefore n(B) = 3$

Observe que A e B são mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \varnothing$.
Logo, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(A \cup B) =$$
$$= \frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.17 Uma urna contém exatamente trinta etiquetas numeradas de 1 a 30. Retirando-se, ao acaso, uma etiqueta da urna, qual é a probabilidade de obtermos um número menor do que 20 ou um número ímpar?

B.18 (Vunesp) Lançando-se simultaneamente dois dados não viciados, a probabilidade de que sua faces superiores exibam soma igual a 7 ou 9 é:
a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{2}{11}$ d) $\frac{5}{18}$ e) $\frac{3}{7}$

B.19 (Cesgranrio) Lançando-se simultaneamente um dado e uma moeda, qual é a probabilidade de se obter a face cara na moeda ou a face 6 no dado?
a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{1}{4}$

B.20 Uma caixa contém exatamente 1.000 bolas numeradas de 1 a 1.000. Qual é a probabilidade de se tirar, ao acaso, uma bola contendo um número par ou um número de dois algarismos?
a) 45% b) 59% c) 50% d) 19% e) 54,5%

B.21 Num grupo de sessenta pessoas, dez são torcedoras do São Paulo, cinco são torcedoras do Palmeiras e as outras são torcedores do Corinthians. Suponha que cada pessoa torça para um único clube. Escolhido ao acaso um elemento do grupo, a probabilidade de ele ser torcedor do São Paulo ou do Palmeiras é:
a) 0,40 b) 0,25 c) 0,50 d) 0,30 e) n.d.a.

B.22 Dentre os automóveis estocados no pátio de uma montadora escolhe-se um, ao acaso. A probabilidade de que o automóvel escolhido tenha freio ABS é $\frac{5}{8}$, a probabilidade de que ele tenha direção hidráulica é $\frac{2}{3}$ e a probabilidade de que ele tenha freio ABS e direção hidráulica é $\frac{11}{24}$. A probabilidade de que esse automóvel tenha freio ABS **ou** direção hidráulica é:
a) $\frac{7}{24}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{5}{6}$

Exercícios complementares de C.8 a C.13

4. PROBABILIDADE CONDICIONAL

Uma urna contém exatamente vinte etiquetas numeradas de 1 a 20. Retira-se uma etiqueta da urna. Sabendo-se que o número da etiqueta é par, qual é a probabilidade de que esse número seja 2?

Como sabemos que o número da etiqueta retirada é par, temos como espaço amostral o seguinte conjunto:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \therefore n(A) = 10$

O evento que queremos é $B = \{2\} \therefore n(B) = 1$.

Logo, $P(B) = \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{1}{10}$.

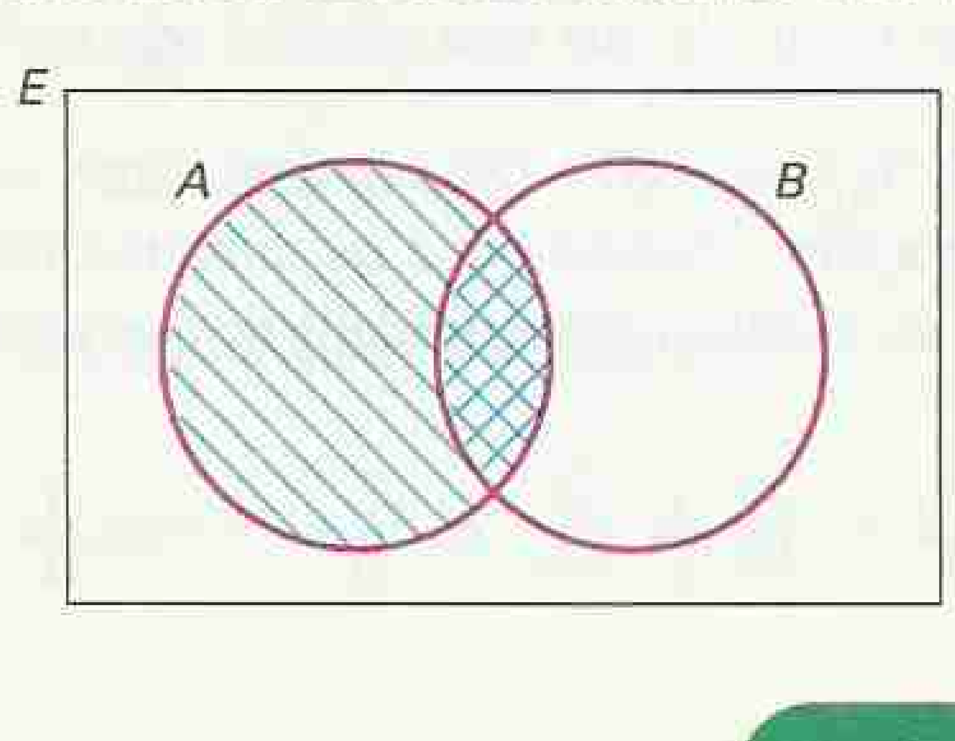
Note que o fato de sabermos que ocorreu o evento "número par" faz com que o espaço amostral fique reduzido a esse evento.

Definição

Chama-se **probabilidade condicional de um evento** B a probabilidade de esse evento ocorrer considerando-se que já ocorreu um evento A.

Indicamos essa probabilidade por $P(B/A)$ (lê-se "probabilidade de B, dado A").

Analisemos o seguinte problema genérico: o espaço amostral E de um experimento aleatório é equiprovável, finito e não-vazio. A e B são eventos de E, com $A \neq \varnothing$. Ao realizar-se o experimento, ocorre o evento A. Qual é a probabilidade de ter ocorrido também o evento B?



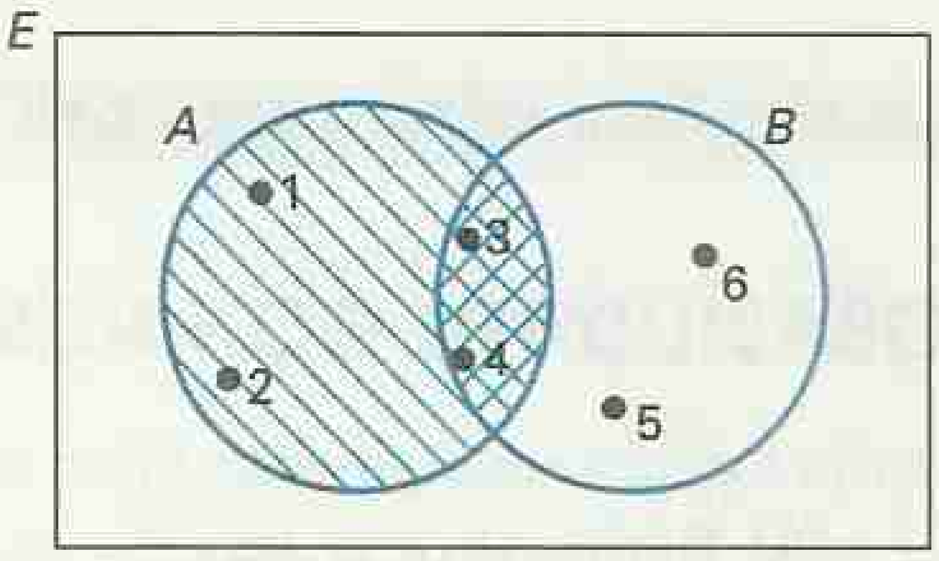
Devemos calcular $P(B/A)$. Como sabemos que ocorreu o evento A, o espaço amostral fica reduzido a esse evento. O evento B, por sua vez, só poderá ocorrer na intersecção de A e B. Assim, temos que:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Note que, se A e B forem mutuamente exclusivos, então $P(B/A) = 0$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.10 No lançamento de um dado, considerar os seguintes eventos $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5, 6\}$.
Qual é a probabilidade de ocorrer o evento B, sabendo-se que ocorreu o evento A?



Resolução
Sabemos que ocorreu o evento A; logo, o espaço amostral fica reduzido a esse evento. O evento B só poderá ocorrer na intersecção de A e B. Assim, temos:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

R.11 No lançamento de dois dados, sabe-se que se obteve nas faces voltadas para cima a soma dos pontos igual a 6. Qual é a probabilidade de que essas faces apresentem o mesmo número de pontos?
Resolução
Temos dois eventos a considerar:

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$
$$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

Como sabemos que ocorreu o evento A, o evento B só poderá ocorrer na intersecção de A e B, isto é, o par (3, 3). Assim, temos $P(B/A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{1}{5}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.23 Uma urna contém exatamente vinte bolas, numeradas de 1 a 20. Retirando-se ao acaso uma bola dessa urna, observa-se que o número é menor do que 8. Qual é a probabilidade de que esse número seja par?

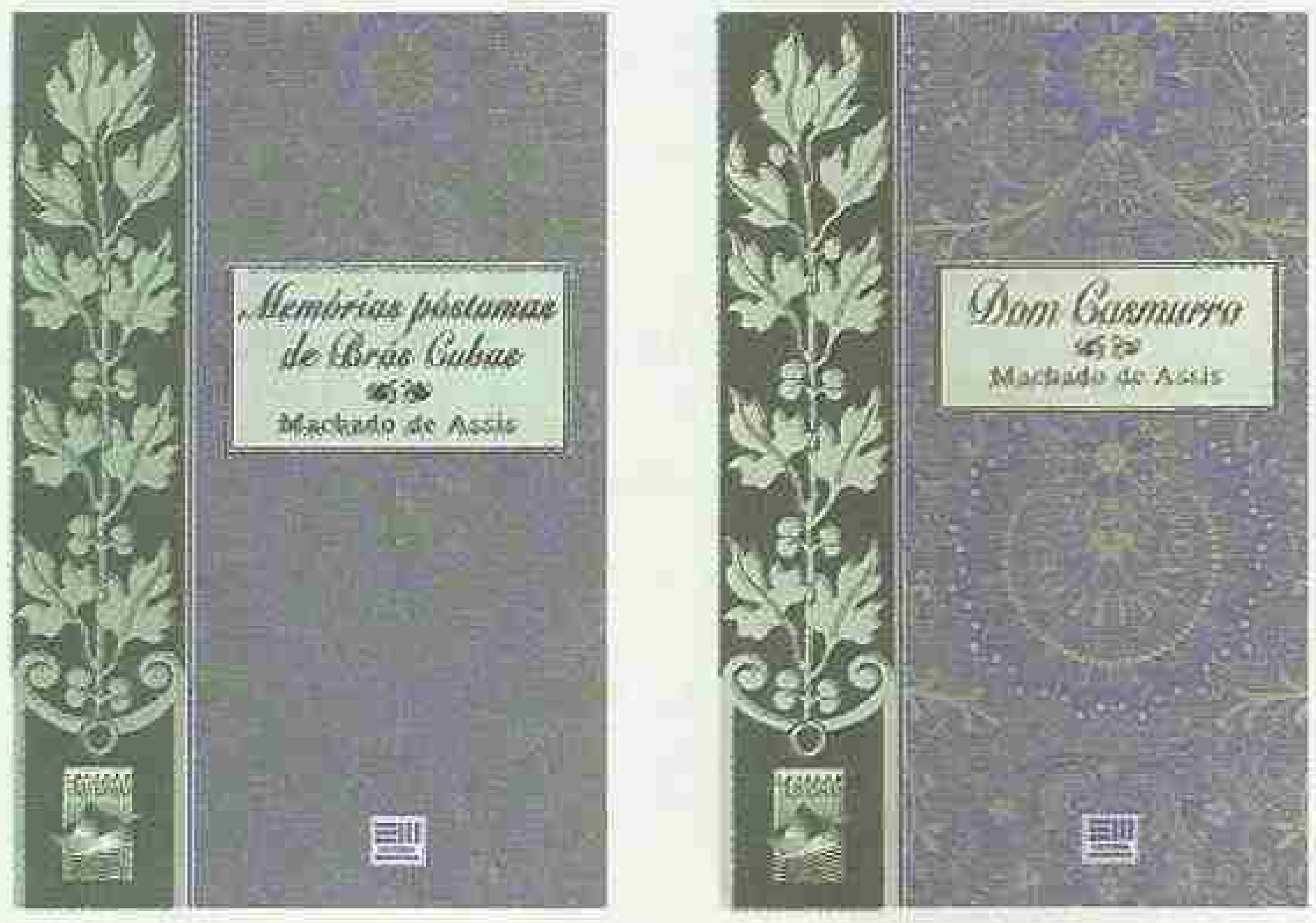
B.24 (U. F. S. Carlos-SP) Dois dados usuais e não-viciados são lançados. Sabe-se que os números observados são ímpares. Então, a probabilidade de que a soma deles seja 8 é:

a) $\frac{2}{36}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{2}{18}$

B.25 (Osec-SP) O número da chapa de um carro é par. A probabilidade de o algarismo das unidades ser zero é:

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{5}{9}$ e) $\frac{1}{5}$

B.26 (UFBA) Todos os 40 alunos de uma classe já leram pelo menos um dos romances *Memórias Póstumas de Brás Cubas* ou *Dom Casmurro*, de Machado de Assis. Vinte e oito alunos já leram *Memórias Póstumas de Brás Cubas* e 31 alunos já leram *Dom Casmurro*. Escolheu-se um desses alunos, ao acaso, constatando-se que ele já havia lido *Dom Casmurro*.



A probabilidade de que o aluno escolhido tenha lido *Memórias Póstumas de Brás Cubas* é:

a) $\frac{3}{31}$ b) $\frac{17}{20}$ c) $\frac{17}{27}$ d) $\frac{19}{31}$ e) $\frac{1}{31}$

Exercícios complementares C.14 e C.15

Eventos independentes

Definição

Seja um espaço amostral E, finito e não-vazio. Sejam A e B eventos de E. Dizemos que A e B são **eventos independentes** se, e somente se:

$$P(B/A) = P(B) \text{ ou } P(A/B) = P(A)$$

Exemplo

Uma moeda é lançada duas vezes. Vamos calcular a probabilidade de:
a) obtermos cara no segundo lançamento;
b) obtermos cara no segundo lançamento, sabendo que obtivemos cara no primeiro lançamento.

Vejamos:
a) O espaço amostral é:

Cara **Coroa**

$$E = \{(c, c), (c, k), (k, k), (k, c)\}$$
$$\therefore n(E) = 4$$

O evento que queremos é $A = \{(c, c), (k, c)\}$
$\therefore\ n(A) = 2$.

Logo, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

b) Temos dois eventos a considerar:

cara no primeiro lançamento $(B) \Rightarrow B = \{(c, c), (c, k)\}$
cara no segundo lançamento $(A) \Rightarrow A = \{(c, c), (k, c)\}$

Como sabemos que ocorreu o evento B, temos que o evento A só pode ter ocorrido na intersecção de A e B:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{2}$$

Observando as respostas dos itens (a) e (b), temos que $P(A/B) = P(A) = \frac{1}{2}$.

Por isso, dizemos que A e B são eventos independentes.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.12 De uma urna com 5 bolas de cores diferentes, azul, vermelha, verde, marrom e preta, foram sorteadas sucessivamente duas bolas. Sabendo que na primeira retirada sorteou-se uma bola vermelha e que esta foi reposta na urna, qual é a probabilidade de que, na segunda retirada, também tenha saído a bola vermelha?

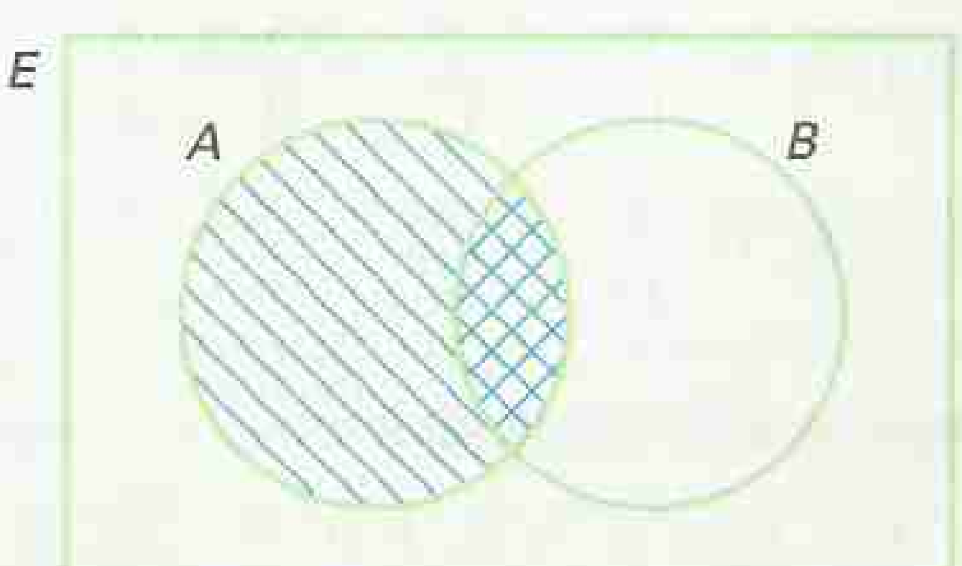
Resolução

Para a segunda retirada a urna continuava com 5 bolas, pois a primeira bola foi reposta. Logo, a probabilidade de ter saído bola vermelha na segunda retirada é $\frac{1}{5}$.

Note que os eventos "resultado na primeira retirada" e "resultado na segunda retirada" são **independentes** quando há reposição da primeira bola, pois a probabilidade de ocorrer um certo resultado no segundo experimento independe do resultado do primeiro. Porém, se não tivesse sido reposta a primeira bola, os eventos seriam **dependentes**, pois a probabilidade de sair bola vermelha na segunda retirada seria 0 (zero), se já tivesse saído bola vermelha na primeira retirada, ou seria $\frac{1}{4}$ em caso contrário. Ou seja, a probabilidade do segundo experimento dependeria do que ocorreu no primeiro.

5. MULTIPLICAÇÃO DE PROBABILIDADES

Seja E um espaço amostral equiprovável, finito e não-vazio. Sejam A e B eventos de E.



Vimos que $P(B/A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)}$.

Dividindo o numerador e o denominador dessa fração por $n(E)$, temos que:

$$P(B/A) = \frac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(E)}}{\dfrac{n(A)}{n(E)}} \Rightarrow$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\therefore \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}$$

Nota

Se A e B forem eventos independentes, então:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.13 Uma urna contém precisamente sete bolas: quatro azuis e três vermelhas. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna, registra-se sua cor e repõe-se a bola na urna. A seguir, retira-se novamente uma bola da urna e registra-se sua cor. Calcular a probabilidade de:

a) sair uma bola azul e depois uma vermelha;
b) saírem duas bolas de cores diferentes.

Resolução

A	A	A	A
	V	V	V

Convenção. A e V representam bola azul e bola vermelha, respectivamente.

a) Queremos que a primeira bola retirada seja azul e a segunda seja vermelha. A probabilidade de a primeira bola sair azul é $\frac{4}{7}$ e a probabilidade de a segunda bola sair vermelha é $\frac{3}{7}$. Assim, a probabilidade de obtermos a seqüência:

$$A \text{ e } V \text{ é } P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$$

Pelo teorema da multiplicação de probabilidades

b) Temos duas seqüências possíveis, com as respectivas probabilidades:

$$A \text{ e } V, \; P_1 = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$$

ou

$\oplus$

$$V \text{ e } A, \; P_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$$

Assim, a probabilidade total é:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{12}{49} + \frac{12}{49} = \frac{24}{49}$$

R.14 Uma urna contém exatamente sete bolas: quatro azuis e três vermelhas. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna, registra-se sua cor e não se repõe a bola na urna. A seguir, retira-se outra bola da urna, registrando-se sua cor. Calcular a probabilidade de:

a) sair uma bola azul e depois uma vermelha;

b) saírem duas bolas de cores diferentes.

Resolução

$$\begin{array}{|cccc|} A & A & A & A \\ & V & V & V \\ \hline \end{array}$$

a) A probabilidade de a primeira bola retirada ser azul é $\frac{4}{7}$ e a probabilidade de a segunda bola retirada ser vermelha, sabendo-se que a primeira bola foi azul, é $\frac{3}{6}$ (diminuímos uma unidade no denominador, pois não houve reposição da primeira bola).

Assim, a probabilidade de a seqüência:

$$A \text{ e } V \text{ ocorrer é } P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

Pelo teorema da multiplicação de probabilidades

b) Temos duas seqüências possíveis, com as respectivas probabilidades:

$$A \text{ e } V,\ P_1 = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

ou

$\oplus$

$$V \text{ e } A,\ P_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$$

Logo, a probabilidade total é:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

R.15 Uma urna contém exatamente nove bolas: cinco azuis e quatro vermelhas.

a) Retirando simultaneamente três bolas da urna, qual a probabilidade de obtermos duas bolas azuis e uma vermelha?

b) Retirando sucessivamente, sem reposição, três bolas da urna, qual a probabilidade de obtermos duas bolas azuis e uma vermelha?

Resolução

a) O espaço amostral E é formado por todos os conjuntos possíveis de três bolas da urna. Assim, temos que:

$$n(E) = C_{9,3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

O evento A que nos interessa é formado por todos os conjuntos possíveis de três bolas da urna, sendo duas azuis e uma vermelha. Assim, temos que:

$$n(A) = C_{5,2} \cdot C_{4,1} = 10 \cdot 4 = 40$$

$$\text{Logo, } P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{\cancel{40}}{\cancel{84}} = \frac{10}{21}.$$

b) Temos três seqüências possíveis, com as respectivas probabilidades:

$$AAV,\ P_1 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63} \quad \text{ou}$$

$$AVA,\ P_2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63} \quad \text{ou}$$

$$VAA,\ P_3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63}$$

Logo, a probabilidade total é:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 =$$

$$= \frac{10}{63} + \frac{10}{63} + \frac{10}{63} = \frac{\cancel{30}}{\cancel{63}} = \frac{10}{21}$$

Comparando os itens (a) e (b) do exercício R.15, percebemos que a probabilidade de retirarmos **simultaneamente** as bolas da urna é igual à probabilidade de retirá-las **sucessivamente e sem reposição**. Esse resultado pode ser generalizado da seguinte maneira:

Propriedade

Sejam $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ elementos de um conjunto A com n elementos. A probabilidade de se retirar **simultaneamente** esses k elementos do conjunto A é igual à probabilidade de se retirá-los **sucessivamente e sem reposição.**

Sugerimos que todo problema onde for pedida a probabilidade de retiradas **simultâneas** seja transformado em retiradas **sucessivas e sem reposição. Cuidado!** Nas retiradas sucessivas a ordem dos elementos retirados deve ser levada em consideração.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.16 Uma urna contém exatamente onze bolas: seis azuis e cinco vermelhas. Retirando-se simultaneamente quatro bolas, qual é a probabilidade de saírem três bolas azuis e uma vermelha?

Resolução

Em vez de retirarmos as bolas **simultaneamente**, resolveremos um problema equivalente, retirando as bolas **sucessivamente e sem reposição**.

Assim, as seqüências que nos interessam, com suas respectivas probabilidades, são:

$$AAAV,\ P_1 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{66} \quad \text{ou}$$

$$AAVA,\ P_2 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66} \quad \text{ou}$$

$$AVAA,\ P_3 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66} \quad \text{ou}$$

$$VAAA,\ P_4 = \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66}$$

Assim, a probabilidade total é:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{\cancel{20}}{\cancel{66}} = \frac{10}{33}$$

Nota

Poderíamos ter calculado apenas P_1 e multiplicá-lo por 4, pois todas as seqüências terão a mesma probabilidade.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.27 Uma urna contém precisamente nove bolas: três brancas, duas pretas e quatro azuis. Retirando-se três bolas da urna, uma de cada vez e com reposição, calcule a probabilidade de saírem:

a) a primeira bola branca, a segunda bola preta e a terceira bola azul;
b) três bolas de cores diferentes;
c) três bolas azuis.

B.28 Uma urna contém exatamente sete bolas: três brancas e quatro pretas. Retirando-se sucessivamente e sem reposição três bolas, qual a probabilidade de:

a) saírem as duas primeiras bolas pretas e a terceira branca?
b) saírem duas bolas pretas e uma branca?
c) sair pelo menos uma bola branca?

B.29 Uma urna contém exatamente nove bolas: cinco brancas e quatro pretas. Retirando-se simultaneamente três bolas, qual é a probabilidade de:

a) saírem duas bolas brancas e uma preta?
b) saírem três bolas pretas?
c) sair pelo menos uma bola branca?
d) saírem no máximo duas bolas brancas?

B.30 No lançamento de um dado e uma moeda, qual é a probabilidade de se obter cara na moeda e a face 5 no dado?

B.31 Uma moeda é lançada cinco vezes. Qual é a probabilidade de se obter:

a) cinco caras? b) três caras e duas coroas?

B.32 (Vunesp) Num grupo de 100 pessoas da zona rural, 25 estão afetadas por uma parasitose intestinal A e 11 por uma parasitose intestinal B, não se verificando nenhum caso de incidência conjunta de A e B. Duas pessoas desse grupo são escolhidas, aleatoriamente, uma após a outra. Determine a probabilidade de que, dessa dupla, a primeira pessoa esteja afetada por A e a segunda, por B.

B.33 (U. E. Londrina-PR) Num baralho comum, de 52 cartas, existem quatro cartas "oito". Retirando-se duas cartas desse baralho, sucessivamente e sem reposição, qual a probabilidade de se obter um par de "oitos"?

a) $\dfrac{1}{2.704}$ c) $\dfrac{1}{1.352}$ e) $\dfrac{1}{442}$

b) $\dfrac{1}{2.652}$ d) $\dfrac{1}{221}$

B.34 (FGV-SP) Numa sala existem seis casais; entre estas 12 pessoas, duas são selecionadas ao acaso.

a) Qual a probabilidade de selecionarmos um homem e sua esposa?
b) Qual a probabilidade de selecionarmos dois homens?

B.35 (UNAERP) Em um campeonato de tiro ao alvo, dois finalistas atiram num alvo com probabilidade de 60% e 70%, respectivamente, de acertar. Nessas condições, a probabilidade de ambos errarem o alvo é:

a) 30% b) 42% c) 50% d) 12% e) 25%

Exercícios complementares de C.16 a C.21

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Fuvest-SP) Uma urna contém 9 bolas, numeradas de 1 a 9. Sorteiam-se, com reposição, duas bolas. A probabilidade de que o número da segunda bola seja estritamente maior que o da primeira é:

a) $\dfrac{72}{81}$ b) $\dfrac{1}{9}$ c) $\dfrac{36}{81}$ d) $\dfrac{30}{81}$ e) $\dfrac{45}{81}$

C.2 (Vunesp) O resultado de uma pesquisa realizada pelo Ipesp sobre o perfil dos fumantes e publicada pela revista *Veja* de 3/6/98 mostra que, num grupo de 1.000 pessoas, 17% fumam e, dentre os fumantes, 44% são mulheres. Se, nesse grupo de 1.000 pessoas, uma é escolhida ao acaso, a probabilidade de ela ser fumante e mulher é, aproximadamente:

a) 0,044 b) 0,075 c) 0,44 d) 0,0075 e) 0,0044

C.3 (Fuvest-SP) Escolhem-se ao acaso dois números naturais distintos de 1 a 20. Qual é a probabilidade de que o produto dos números escolhidos seja ímpar?

a) $\dfrac{9}{38}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{9}{20}$ d) $\dfrac{1}{4}$ e) $\dfrac{8}{25}$

C.4 A Supersena é uma modalidade de jogo em que o apostador assinala um mínimo de 6 e um máximo de 15 dezenas em um cartão com 48 dezenas. Dentre essas quarenta e oito dezenas são sorteadas seis.

a) Calcule o número de cartões diferentes que podem ser formados com a aposta mínima.
b) Qual é a probabilidade de serem sorteadas as dezenas de um cartão com a aposta mínima?

C.5 Márcia precisa telefonar para sua prima Priscilla, mas se esqueceu do número do telefone. Lembra-se apenas de que o número é formado por sete algarismos e que os três primeiros são 8, 6 e 9, nessa ordem. Qual é a probabilidade de, em apenas uma tentativa, Márcia discar o número correto?

C.6 (Enem) Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representadas, em cada uma delas, uma das letras T, V ou E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00.

I) A probabilidade de o *participante* não ganhar qualquer prêmio é igual a:

a) 0 b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{1}{6}$

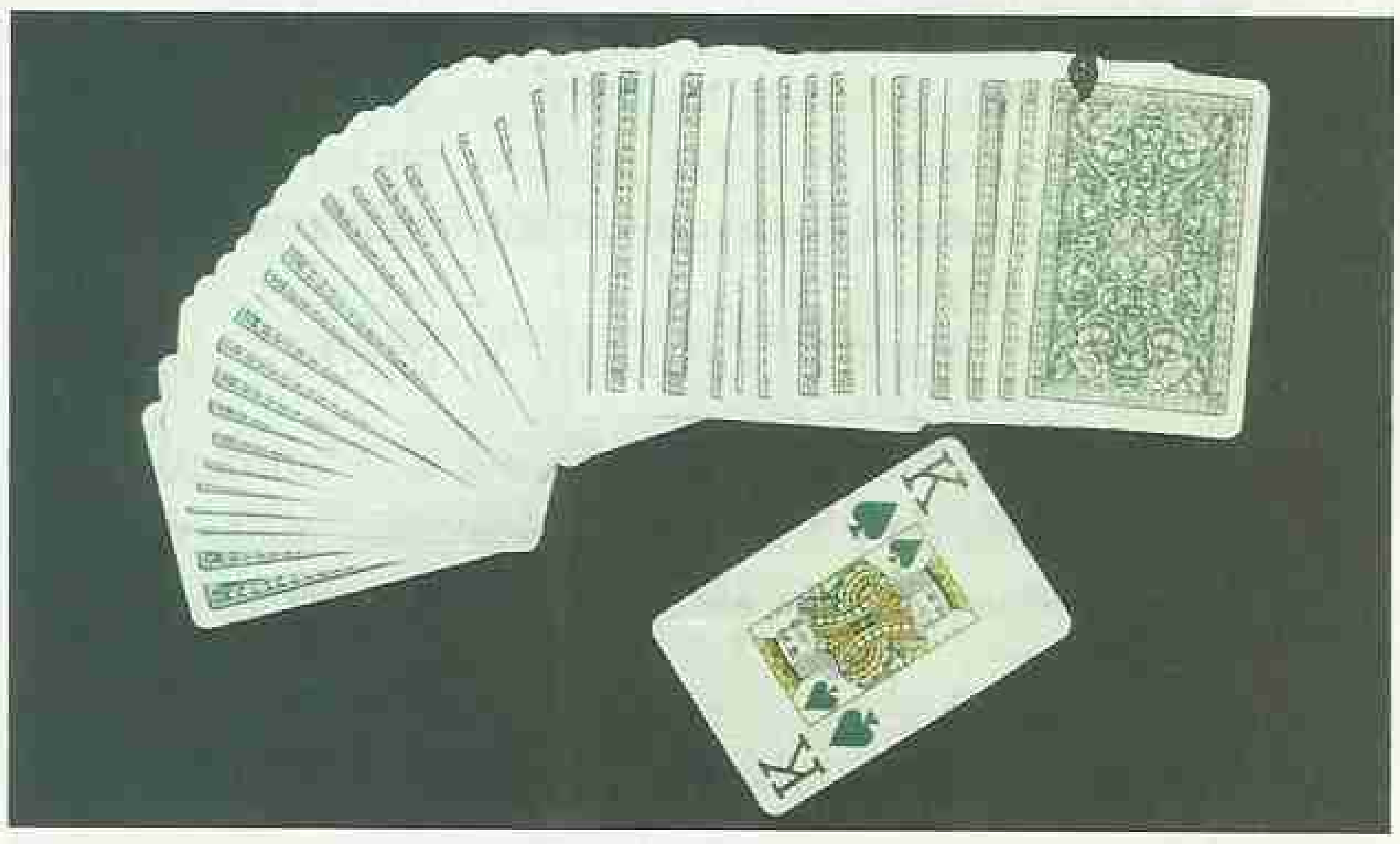
II) A probabilidade de o *concorrente* ganhar exatamente o valor de R$ 400,00 é igual a:

a) 0 b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $\dfrac{1}{6}$

C.7 (UFBA) No lançamento de três dados, qual é a probabilidade de que o produto dos três números (de pontos) obtidos seja par? **Sugestão**. Calcule, inicialmente, a probabilidade do evento complementar.

C.8 Um baralho é composto de 52 cartas distribuídas em quatro naipes: ouros (♦), copas (♥), espadas (♠) e paus (♣). Para cada naipe existem treze cartas: A (ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (valete), Q (dama) e K (rei). Sorteando-se, ao acaso, uma carta desse baralho, qual é a probabilidade de se obter um rei ou uma carta de paus?

FOTOS: LUIZ ANTÔNIO



C.9 Em uma conferência estão reunidos: cinco mulheres e sete homens, matemáticos; quatro mulheres e oito homens, físicos; seis mulheres e quatro homens, químicos. Uma pessoa é escolhida, ao acaso, para presidir a conferência. Qual a probabilidade de que essa pessoa seja mulher ou matemático(a)?

C.10 (FGV-SP) Roberto J., administrador recém-formado, envia um currículo para duas empresas *A* e *B*, à procura de emprego. A probabilidade de ser aceito pela empresa *A* é de 25%, a probabilidade de ser aceito pela empresa *B* é 20% e a probabilidade de ser aceito por ambas é 8%.

a) Qual é a probabilidade de ser aceito por ao menos uma empresa?

b) Qual é a probabilidade de ser aceito por exatamente uma empresa?

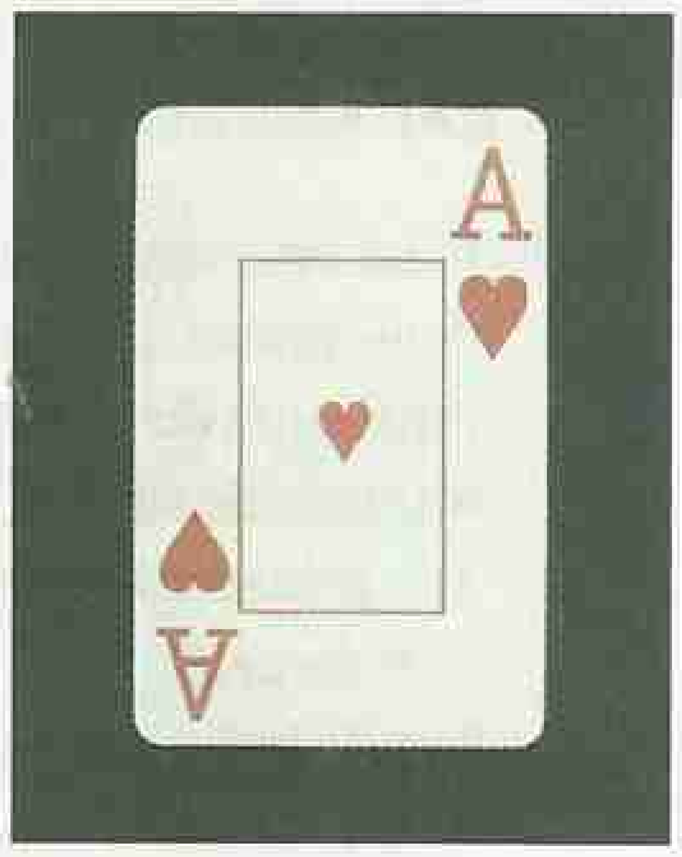
C.11 Num colégio, a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, ter 18 anos ou mais é 38% e a probabilidade de ter 18 anos ou menos é 79%. Qual a probabilidade de esse aluno ter exatamente 18 anos?

C.12 (Fuvest-SP) A probabilidade de que a população atual de um país seja de 110 milhões ou mais é 95%. A probabilidade de ela ser de 110 milhões ou menos é 8%. Calcule a probabilidade de essa população ser de 110 milhões.

C.13 Na gôndola de um supermercado há somente sabonetes azuis ou da marca Lux, num total de 140 unidades: 80 azuis e 100 da marca Lux. Retirando-se, ao acaso, um sabonete dessa gôndola, qual é a probabilidade de se obter um sabonete azul da marca Lux?

C.14 Uma pesquisa feita entre setenta pessoas revelou que, 35 já consumiram o produto *A*; cinqüenta já consumiram o produto *B*; e cinco ainda não consumiram nem *A* nem *B*. Escolheu-se uma dessas setenta pessoas ao acaso, e ela já havia consumido o produto *A*. Qual é a probabilidade de que essa pessoa também tenha consumido o produto *B*?

C.15 Um baralho de 52 cartas é constituído por quatro naipes — ouros, paus, espadas e copas —, sendo treze cartas de cada naipe: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q e K. Escolhida uma carta desse baralho e sabendo que essa carta é um ás (A), qual é a probabilidade de que esse ás seja de copas?



C.16 (Fuvest)

a) Construa o espaço amostral formado pelas oito possibilidades de distribuição de sexo (M ou F) dos três filhos de um casal. Determine nesse espaço os subconjuntos correspondentes aos eventos.
A — Existem crianças de sexos diferentes.
B — Existem pelo menos duas meninas.

b) Supondo que as oito possibilidades são igualmente prováveis, mostre que *A* e *B* são eventos independentes. **Sugestão**. Você deve provar que $P(A/B) = P(A)$ ou que $P(B/A) = P(B)$.

C.17 Num teste de sete questões do tipo "classificar a sentença como verdadeira ou falsa", a probabilidade de um candidato, que responde a todas ao acaso, acertar pelo menos seis questões é:

a) $\frac{1}{256}$ b) $\frac{1}{128}$ c) $\frac{1}{64}$ d) $\frac{1}{32}$ e) $\frac{1}{16}$

C.18 Uma prova é composta de cinqüenta testes de múltipla escolha, cada um com cinco alternativas, sendo apenas uma correta. Qual é a probabilidade de que um aluno, apenas "chutando", acerte todas as questões?

C.19 Uma moeda é lançada 5 vezes. Calcule a probabilidade de se obter a face "cara" voltada para cima em pelo menos um lançamento. **Sugestão**. Calcule inicialmente a probabilidade do evento complementar, isto é, de não se obter nenhuma "cara".

C.20 (SUPRA) Tem-se dois dados, sendo um perfeito e o outro com todas as faces marcadas com 6 pontos. Um deles é escolhido ao acaso e lançado. A probabilidade de se obter 6 é:

a) $\frac{7}{6}$ b) $\frac{6}{7}$ c) $\frac{7}{12}$ d) $\frac{6}{12}$ e) $\frac{1}{6}$

Sugestão. Você deve calcular a probabilidade: "escolher dado *A* **e** obter 6 **ou** escolher dado *B* **e** obter 6".

C.21 (Vunesp) Um piloto de fórmula 1 estima que suas chances de subir ao pódio numa dada prova são de 60% se chover no dia da prova e de 20%, se não chover. O serviço de meteorologia prevê que a probabilidade de chover durante a prova é de 75%. Nessas condições, calcule a probabilidade de que o piloto venha a subir ao pódio. **Sugestão**. Você deve calcular a probabilidade: "chover **e** ele subir ao pódio **ou** não chover **e** ele subir ao pódio".