Definição

Seja V um conjunto não-vazio qualquer de objetos no qual estão definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalares (números). Por ***adição*** nós entendemos uma regra que associa a cada par de objetos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V um objeto $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, chamado a ***soma*** de $\mathbf{u}$ com $\mathbf{v}$; por ***multiplicação por escalar*** nós entendemos uma regra que associa a cada escalar k e cada objeto $\mathbf{v}$ em V um objeto $k\mathbf{v}$, chamado o ***múltiplo*** de $\mathbf{v}$ por k. Se os seguintes axiomas são satisfeitos por todos objetos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em V e quaisquer escalares k e l, então nós dizemos que V é um ***espaço vetorial*** e que os objetos de V são ***vetores***.

(1) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são objetos em V então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é um objeto em V.

(2) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(3) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(4) Existe um objeto $\mathbf{0}$ em V, chamado um ***vetor nulo*** ou ***vetor zero*** de V, tal que $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ para cada $\mathbf{u}$ em V.

(5) Para cada $\mathbf{u}$ em V, existe um objeto $-\mathbf{u}$, chamado um ***negativo*** de $\mathbf{u}$, tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(6) Se k é qualquer escalar e $\mathbf{v}$ é um objeto em V, então $k\mathbf{v}$ é um objeto em V.

(7) $l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$

(8) $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$

(9) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

(10) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

EXEMPLO 2 Um Espaço Vetorial de Matrizes 2×2

Mostre que o conjunto V de todas as matrizes 2×2 com entradas reais é um espaço vetorial se a adição vetorial é definida pela adição matricial e a multiplicação vetorial por escalar é definida pela multiplicação matricial por escalar.

Para provar o Axioma 1, nós devemos mostrar que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é um objeto em V, ou seja, nós devemos mostrar que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é uma matriz 2×2. Mas isto segue da definição de soma matricial, pois

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

Similarmente, o Axioma 6 vale pois para cada número real k nós temos

$$k\mathbf{v} = k \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv_{11} & kv_{12} \\ kv_{21} & kv_{22} \end{bmatrix}$$

e portanto $k\mathbf{v}$ é uma matriz 2×2 e conseqüentemente um objeto em V.

Para provar o Axioma 4, nós devemos encontrar um objeto $\mathbf{0}$ em V tal que $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ para cada $\mathbf{u}$ em V. Isto pode ser feito definindo $\mathbf{0}$ como

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com esta definição,

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

EXEMPLO 4 Um Espaço Vetorial de Funções Reais

Seja V o conjunto de funções reais definidas na reta real $(-\infty, \infty)$. Se $\mathbf{f} = f(x)$ e $\mathbf{g} = g(x)$ são duas tais funções e se k é um número real qualquer, defina a função-soma $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ e o múltiplo escalar $k\mathbf{f}$, respectivamente, por

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (k\mathbf{f})(x) = kf(x)$$

Dito em palavras, o valor da função $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ no ponto x é obtido somando os valores de $\mathbf{f}$ e de $\mathbf{g}$ no ponto x (Figura 5.1.1a). Similarmente, o valor de $k\mathbf{f}$ no ponto x é k vezes o valor de $\mathbf{f}$ no ponto x (Figura 5.1.1b). Nos exercícios nós vamos pedir que você mostre que V é um espaço vetorial em relação a estas operações. Este espaço vetorial é denotado por $F(-\infty, \infty)$. Se $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ são vetores neste espaço, nós dizemos que $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ equivale a ter $f(x) = g(x)$ para cada x no intervalo $(-\infty, \infty)$.

EXEMPLO 5 Um Conjunto que não é um Espaço Vetorial

Seja $V = R^2$ e defina as operações de adição e multiplicação por escalar como segue: Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, defina

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

e, se k é um número real qualquer, defina

$$k\,\mathbf{v} = (k\,v_1, 0)$$

Por exemplo, se $\mathbf{u} = (2, 4)$, $\mathbf{v} = (-3, 5)$ e $k = 7$, então

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2 + (-3), 4 + 5) = (-1, 9)$$

$$k\,\mathbf{v} = 7\,\mathbf{v} = (7 \cdot (-3), 0) = (-21, 0)$$

A adição é a operação de adição padrão em R^2 mas a operação de multiplicação por escalar não é a multiplicação por escalar padrão. Nos exercícios nós iremos pedir para você mostrar que os nove primeiros axiomas de espaço vetorial estão satisfeitos; contudo, existem valores de $\mathbf{u}$ para os quais o Axioma 10 falha. Por exemplo, se $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ é tal que $u_2 \neq 0$, então

EXEMPLO 6 Cada Plano pela Origem é um Espaço Vetorial

Seja V um plano qualquer pela origem do R^3. Nós iremos mostrar que os pontos em V formam um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar de vetores de R^3. Pelo Exemplo 1, nós sabemos que o espaço R^3 todo é um espaço vetorial com estas operações. Assim, os Axiomas 2, 3, 7, 8, 9 e 10 valem para todos os pontos em R^3 e, conseqüentemente, para todos os pontos do plano V. Basta mostrar, portanto, que os Axiomas 1, 4, 5 e 6 estão satisfeitos.

Como o plano V passa pela origem, ele tem uma equação da forma

$$ax + by + cz = 0 \tag{1}$$

(Teorema 3.5.1). Assim, se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ são pontos em V, então $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ e $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. Somando estas equações dá

$$a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) = 0$$

Esta igualdade diz que as coordenadas do ponto

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

verificam (1); assim, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está no plano V. Isto prova que o Axioma 1 está satisfeito. As verificações dos Axiomas 4 e 6 são deixadas como exercícios; no entanto, nós provaremos que o Axioma 5 é satisfeito. Multiplicando $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ por -1 dá

$$a(-u_1) + b(-u_2) + c(-u_3) = 0$$

Assim, $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$ está em V, estabelecendo o Axioma 5. ◆

Teorema 5.1.1

Sejam V um espaço vetorial, $\mathbf{u}$ *um vetor em V e l um escalar; então:*

(a) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
(b) $l\mathbf{0} = \mathbf{0}$
(c) $(-1)\,\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
(d) *Se* $l\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *então* $l = 0$ *ou* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Teorema 4.1.4 Propriedades do Comprimento em R^n

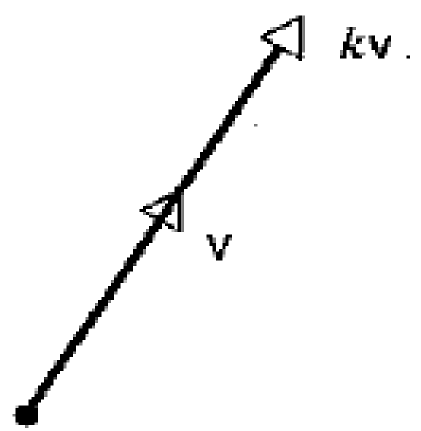
Se **u**, **v** *e* **w** *são vetores em* R^n *e* k *é um escalar, então:*

$(a)\ \|\mathbf{u}\| \geq 0$

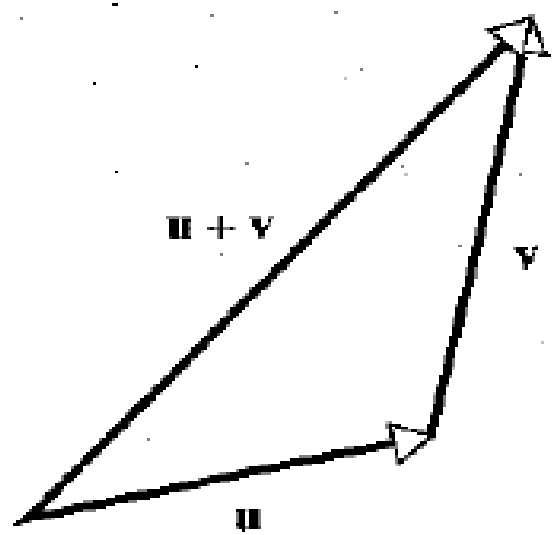
$(b)\ \|\mathbf{u}\| = 0$ *se, e somente se,* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$(c)\ \|k\mathbf{v}\| = |k|\,\|\mathbf{v}\|$

$(d)\ \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (*Desigualdade triangular*)



$(a)\ \|k\mathbf{v}\| = |k|\,\|\mathbf{v}\|$



$(b)\ \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Teorema 4.1.5 Propriedades da Distância em R^n

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *são vetores em* R^n, *então:*

(*a*) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$

(*b*) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ *se, e somente se*, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

(*c*) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$

(*d*) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (*Desigualdade triangular*)

Definição

Dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em R^n são ***ortogonais*** se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

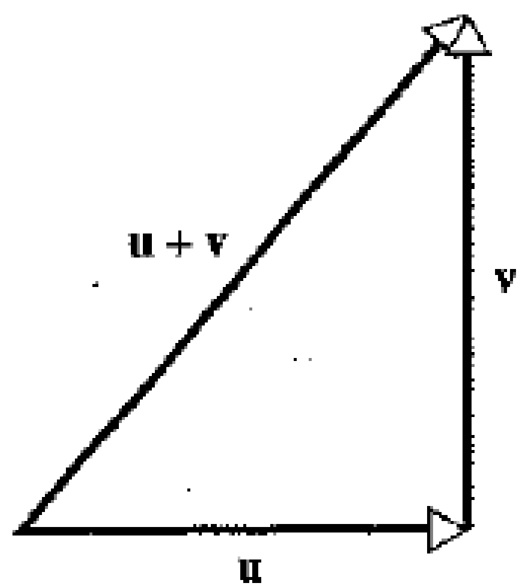
Teorema 4.1.6

Se **u** *e* **v** *são vetores em* R^n *com o produto interno euclidiano, então*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \tag{6}$$

As propriedades dos vetores ortogonais serão discutidas com mais detalhe mais adiante no texto, mas agora observamos que muitas das propriedades familiares de vetores ortogonais dos espaços euclidianos R^2 e R^3 continuam valendo no espaço euclidiano R^n. Por exemplo, se **u** e **v** são vetores ortogonais de R^2 ou de R^3, então **u**, **v** e **u** + **v** formam os lados de um triângulo retângulo (Figura 4.1.4); assim, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$



Teorema 4.1.7 **O Teorema de Pitágoras em R^n**

Se **u** *e* **v** *são vetores ortogonais em R^n com o produto interno euclidiano, então*

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Notações Alternativas para Vetores em R^n

Muitas vezes é útil escrever um vetor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de R^n em notação matricial como uma matriz-linha ou uma matriz-coluna:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \qquad k\mathbf{v} = k\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ \vdots \\ kv_n \end{bmatrix}$$

Uma Fórmula Matricial para o Produto Escalar

Se nós usarmos a notação de matrizes-coluna para os vetores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

e omitirmos o colchete de matrizes 1×1, então teremos

$$\mathbf{v}^T\mathbf{u} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = [u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n] = [\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Assim, para vetores na notação de matrizes-coluna nós temos a seguinte fórmula para o produto interno euclidiano:

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}} \tag{7}$$

EXEMPLO 6 Um Sistema Linear Escrito na Forma de Produto Escalar

Um exemplo de um sistema linear expresso no formato (11) de produto escalar é:

Sistema	Forma de Produto Escalar
$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} (3, -4, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (2, -7, -4) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (1, 5, -8) \cdot (x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ◆