O PRINCÍPIO DA CASA DO POMBO

Muitos resultados, na teoria combinatória, vêm da seguinte afirmação quase óbvia.

Princípio da casa de pombo:[†] Se n casas de pombos são ocupadas por $n + 1$ ou mais pombos, então pelo menos uma casa é ocupada por mais de um pombo.

Esse princípio pode ser aplicado a muitos problemas para os quais queremos mostrar que uma determinada situação ocorre.

Exemplo 6.9

(*a*) Suponha que um departamento tem 13 professores (pombos). Então, dois dos professores (pombos) nasceram no mesmo mês (casa de pombos).

(*b*) Suponha que um saco de lavanderia contém muitas meias vermelhas, brancas e azuis. Então, é necessário pegar apenas quatro meias (pombos) para ter certeza de obter um par com uma única cor (casa de pombo).

(*c*) Ache o menor número de elementos que devem ser escolhidos em um conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ para se ter certeza de que dois dos números somem 10.

Aqui as casas de pombos são os cinco conjuntos $\{1,9\}$, $\{2,8\}$, $\{3,7\}$, $\{4,6\}$ e $\{5\}$. Portanto, qualquer escolha de seis elementos (pombos) de S garantirá que dois dos números somem dez.

Princípio da casa de pombos generalizado: Se n casas de pombo são ocupadas por $kn + 1$ ou mais pombos, onde k é um inteiro positivo, então pelo menos uma casa de pombo é ocupada por $k + 1$ ou mais pombos.

Exemplo 6.10

(*a*) Ache o número mínimo de estudantes de uma turma que garante que pelo menos três deles nasceram no mesmo mês.

Aqui $n = 12$ meses é o número de casas de pombo, e $k + 1 = 3$, ou $k = 2$. Portanto, dentre $kn + 1 = 25$ estudantes (pombos), três nasceram no mesmo mês.

(*b*) Suponha que um saco de lavanderia contém muitas meias vermelhas, brancas e azuis. Ache o número de meias que é preciso escolher a fim de obter dois pares (quatro meias) da mesma cor.

Aqui existem $n = 3$ cores (casas de pombos), e $k + 1 = 4$, ou $k = 3$. Assim, dentre quaisquer $kn + 1 = 10$ meias (pombos), quatro têm a mesma cor.

PARTIÇÕES ORDENADAS E NÃO ORDENADAS

Suponha que um saco contém sete bolas de gude numeradas de 1 a 7. Calculamos o número de maneiras que podemos retirar, primeiramente, duas bolas do saco, depois três bolas, e finalmente duas bolas. Em outras palavras, queremos calcular o número de *partições ordenadas*

$$[A_1, A_2, A_3]$$

do conjunto de sete bolas de gude em células A_1 contendo duas bolas, A_2 contendo três bolas e A_3 contendo duas bolas. Denominamos essas partições como ordenadas porque distinguimos

$$[\{1,2\},\ \{3,4,5\},\ \{6,7\}] \qquad \text{e} \qquad [\{6,7\},\ \{3,4,5\},\ \{1,2\}]$$

que definem a mesma partição de A.

$$\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}=210$$

Teorema 6-8: suponha que A contém n elementos, e sejam $n_1, n_2, \ldots, n_r$ inteiros positivos cuja soma é n, isto é, $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Então, existem

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_r!}$$

partições distintas ordenadas de A da forma $[A_1, A_2, \ldots, A_r]$, onde A_1 contém n_1 elementos, A_2 contém n_2 elementos, ..., e A_r contém n_r elementos.

Exemplo 6.12 Ache o número m de maneiras que nove brinquedos podem ser divididos entre quatro crianças se a mais jovem deve receber três brinquedos e cada uma das outras, dois brinquedos.

Queremos achar o número m de partições ordenadas de nove brinquedos em quatro células contendo 3, 2, 2, 2 brinquedos, respectivamente. Pelo Teorema 6.8,

$$m = \frac{9!}{3!\,2!\,2!\,2!} = 7.560$$

Partições Não Ordenadas

Freqüentemente, desejamos particionar um conjunto A em uma coleção de subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r$ onde os subconjuntos, agora, não estão ordenados. Da mesma forma que o número de permutações com repetição foi obtido do número de permutações, dividindo por $k!$ quando k objetos eram equivalentes, também podemos obter o número de partições não ordenadas a partir do número de partições ordenadas, dividindo por $k!$ quando k dos conjuntos têm o mesmo número de elementos. Isso é ilustrado no próximo exemplo, no qual resolvemos o problema de duas maneiras.

> ***Exemplo 6.13*** Ache o número m de maneiras que 12 estudantes podem ser divididos em três times A_1, A_2 e A_3, de tal forma que cada time contenha quatro estudantes.

$$\frac{12!}{4!\,4!\,4!} = 34\,650 \longrightarrow m = 34\,650/6 = 5775 \text{ partições (não ordenadas).}$$