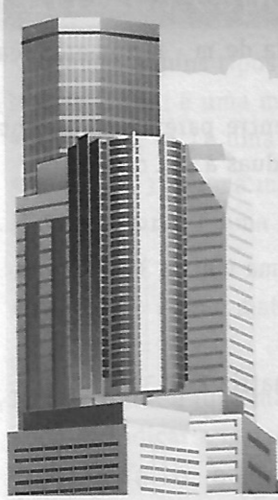
6 Matrizes

Introdução

Em jornais, revistas e na internet frequentemente encontramos informações numéricas organizadas em forma de tabelas, com linhas e colunas. Vejamos alguns casos:



Variação do índice de venda de imóveis (maio/2012)

EM PORCENTAGEM

Venda	No mês	No ano	12 meses	36 meses
Brasil	0,9	6,3	19,9	n/d
São Paulo	1,2	6,4	21,5	88,7
Belo Horizonte	0,4	7,7	15,7	67,9
Brasília	0,5	5,2	9,7	n/d
Fortaleza	2,4	4,3	15,8	n/d
Recife	1,9	12,5	31,8	n/d
Rio de Janeiro	1,1	6,7	24,1	130,3
Salvador	−1,3	1,2	4,5	n/d

Obs.: n/d = não disponíveis

Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 1/jul./2012.

Alex Argozino

A multiplicação de carros

Número de veículos por 1 000 habitantes	1990	2010
Estados Unidos	752	**814**
Itália	507	**688**
Japão	456	**592**
Alemanha	512	**545**
Argentina	180	**222**
BRASIL	87	**153**

Fonte: *Veja*, 13/jun./2012.

Paulo Fridman/Pulsar Imagens

Na Matemática, as tabelas que você acabou de ver são exemplos de **matrizes**.

Um pouco de História

Como surgiram as matrizes

As matrizes teriam surgido com a escola inglesa Trinity College, em um artigo do matemático Arthur Cayley (1821-1895), datado de 1858. Vale lembrar, no entanto, que, bem antes, no século III a.C., os chineses já desenvolviam um processo de resolução de sistemas lineares em que aparecia implícita a ideia das matrizes.

Cayley criou as matrizes no contexto de estrutura algébrica (assunto de Matemática do Ensino Superior), sem pensar em suas aplicações práticas que apareceriam posteriormente, como a representação de informações numéricas em tabelas, organizadas segundo linhas e colunas, a computação gráfica, etc.

Christopher Hill/scenicireland.com/ Alamy/Other Images

Biblioteca do Trinity College.

Definição

Sejam *m* e *n* números naturais não nulos.

Uma matriz do tipo ou formato $m \times n$ (ou simplesmente $m \times n$) é uma tabela de $m \cdot n$ números reais dispostos em *m* linhas (filas horizontais) e *n* colunas (filas verticais).

Representamos usualmente uma matriz colocando seus elementos (números) entre parênteses ou entre colchetes. Menos frequente é a colocação de duas barras verticais à sua esquerda e duas à sua direita.

Vejamos alguns exemplos:

$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz 1×3.

$B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×2.

$C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×2.

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×4.

$E = \left\| \begin{matrix} \sqrt{3} & \frac{1}{4} & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{matrix} \right\|$ é uma matriz 2×3.

Representação de uma matriz

Consideremos uma matriz A do tipo $m \times n$. Um elemento qualquer dessa matriz será representado pelo símbolo a_{ij}, no qual o índice *i* refere-se à linha em que se encontra tal elemento, e o índice *j* refere-se à coluna em que se encontra o elemento.

Vamos convencionar que as linhas são numeradas de cima para baixo, e as colunas, da esquerda para a direita.

De modo geral, uma matriz A do tipo $m \times n$ é representada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que *i* e *j* são inteiros positivos tais que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, e a_{ij} é um elemento qualquer de A. Acompanhe o exemplo a seguir.

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

- O elemento que está na linha 1, coluna 1, é $a_{11} = -1$.
- O elemento que está na linha 1, coluna 2, é $a_{12} = 0$.
- O elemento que está na linha 2, coluna 1, é $a_{21} = -2$.
- O elemento que está na linha 2, coluna 2, é $a_{22} = 5$.
- O elemento que está na linha 3, coluna 1, é $a_{31} = 3$.
- O elemento que está na linha 3, coluna 2, é $a_{32} = 4$.

Exercício resolvido

1. Escrever a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$.

Solução:

Uma matriz do tipo 2×3 pode ser genericamente representada por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Fazendo $a_{ij} = i - j$, temos:

$a_{11} = 1 - 1 = 0$ $\quad a_{12} = 1 - 2 = -1$ $\quad a_{13} = 1 - 3 = -2$

$a_{21} = 2 - 1 = 1$ $\quad a_{22} = 2 - 2 = 0$ $\quad a_{23} = 2 - 3 = -1$

Assim, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Matrizes especiais

Vejamos alguns tipos de matrizes especiais:

- **Matriz linha**: é uma matriz formada por uma única linha.
  - $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz linha 1×3.
  - $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha 1×2.
- **Matriz coluna**: é uma matriz formada por uma única coluna.
  - $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 4×1.
  - $B = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 3×1.
- **Matriz nula**: é uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero.
  Pode-se indicar a matriz nula $m \times n$ por $0_{m \times n}$.
  - $0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula 2×3.
  - $0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz nula 2×2.
- **Matriz quadrada**: é uma matriz que possui número de linhas igual ao número de colunas.
  - $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2. Dizemos que A é quadrada de ordem 2.
  - $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & \frac{1}{3} \\ -2 & 0 & 7 \\ \sqrt{3} & 1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 3×3. Dizemos que B é quadrada de ordem 3.

Seja A uma matriz quadrada de ordem *n*. Temos que:

- os elementos de A cujo índice da linha é igual ao índice da coluna constituem a **diagonal principal** de A.
  Se A é uma matriz quadrada de ordem 3, os elementos a_{11}, a_{22} e a_{33} formam a diagonal principal de A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- os elementos de A cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n + 1$ constituem a **diagonal secundária** de A.

Retomando o exemplo anterior, os elementos a_{13}, a_{22} e a_{31} formam a diagonal secundária de A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz transposta

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se **transposta de A** (indica-se por A^t) à matriz:

$$A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$$

tal que $a'_{ji} = a_{ij}$ para todo i e todo j.

Em outras palavras, a matriz A^t é obtida trocando-se, ordenadamente, as linhas pelas colunas da matriz A.

- A transposta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ é $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Para a matriz A, observe que: $a_{11} = 1 = a'_{11}$

$a_{12} = 3 = a'_{21}$

$a_{21} = 5 = a'_{12}$

$a_{22} = 9 = a'_{22}$

- A transposta de $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.
- A transposta de $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ é $C^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercícios

1. Dê o tipo (formato) de cada uma das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 0 & -1 \\ 3 & 9 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

2. Em cada caso, determine o elemento a_{22}, se existir:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -5 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 7 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, em que $a_{ij} = 3i - 2j$.

4. Determine a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, sendo $b_{ij} = 2 + i + j$.

5. Qual é a soma dos elementos da matriz $C = (c_{ij})_{2 \times 4}$, em que $c_{ij} = 1 + i - j$?

6. Determine a soma dos elementos da diagonal principal de cada matriz quadrada seguinte:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -7 \\ 1 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

7. Em cada caso, obtenha a transposta da matriz dada:

a) $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 11 \\ 0{,}5 & 7 \\ 3 & 4{,}1 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

8. Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que $a_{ij} = 2i + 3j$. Escreva a matriz A^t.

9. Qual é o elemento a_{46} da matriz $A = (a_{ij})_{8 \times 8}$, em que $a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{2j}{i}$?

10. Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = i \cdot j$. Forneça os elementos que pertencem às diagonais principal e secundária de A.

11. Na matriz seguinte, estão representadas as quantidades de sorvetes de 1 bola e de 2 bolas comercializados no primeiro bimestre de um ano em uma sorveteria:

$$A = \begin{pmatrix} 1\,320 & 1\,850 \\ 1\,485 & 2\,040 \end{pmatrix}$$

Thinkstock/Getty Images

Cada elemento a_{ij} dessa matriz representa o número de unidades do sorvete do tipo *i* (i = 1 representa uma bola e i = 2, duas bolas) vendidas no mês *j* (j = 1 representa janeiro e j = 2, fevereiro).

a) Quantos sorvetes de duas bolas foram vendidos em janeiro?

b) Em fevereiro, quantos sorvetes de duas bolas foram vendidos a mais que o de uma bola?

c) Se o sorvete de uma bola custa R$ 3,00 e o de duas bolas custa R$ 5,00, qual foi a arrecadação bruta da sorveteria no bimestre com a venda desses dois tipos de sorvete?

12. A matriz D seguinte representa as distâncias (em km) entre as cidades X, Y e Z:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 27 \\ 15 & 0 & 46 \\ 27 & 46 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz fornece a distância entre as cidades *i* e *j*. Se a cidade X é representada pelo número 1, Y por 2 e Z por 3:

a) determine as distâncias entre X e Y, Z e X, e Y e Z.

b) qual é a transposta da matriz D?

13. Dê a matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$, em que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \geq j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$$

14. Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que:

$$a_{ij} = \begin{cases} \cos(\pi i), \text{ se } i \geq j \\ \operatorname{sen}(\pi j), \text{ se } i < j \end{cases}$$

a) Escreva A.

b) Escreva A^t.

15.

	Pão doce	Pão francês	Pão integral
Calorias	274	269	286
Proteínas (g)	7,5	9,3	9,4
Fibra (g)	0,3	0,5	1,0
Cálcio (mg)	12	22	49
Fósforo (mg)	70	107	209
Ferro (mg)	1,2	1,2	3,6

Fonte: *Tabela de composição de alimentos*. Rio de Janeiro: IBGE, 1999.

Na tabela acima, estão representadas as quantidades de calorias, proteínas, fibra, cálcio, fósforo e ferro, encontradas em 100 g de alguns tipos de pão.

a) Calcule a razão entre a quantidade de fibra encontrada em 100 g de pão integral e em 100 g de pão doce.

b) Qual é o tipo de pão mais rico em minerais? E o mais pobre em proteínas?

c) Considere que um pão francês ou integral, vendido em uma padaria, tenha massa aproximada de 50 g. Diariamente, um casal compra dois pãezinhos: um integral, para ela, e um francês, para ele. Em uma semana, quantos mg de ferro ela terá ingerido a mais que ele? E de fósforo?

Thinkstock/Getty Images

Igualdade de matrizes

Elementos correspondentes

Dadas duas matrizes de mesmo tipo (ou forma, ou formato), $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$, dizemos que elementos de mesmo índice (linha e coluna) são correspondentes.

Assim:

- a_{11} e b_{11} são correspondentes;
- a_{12} e b_{12} são correspondentes;

$\vdots \quad \vdots$

- a_{mn} e b_{mn} são correspondentes.

Igualdade

Duas matrizes A e B de mesmo tipo $m \times n$ são iguais quando todos os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, temos que $A = B$ quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i ($i = 1, 2, \dots, m$) e para todo j ($j = 1, 2, \dots, n$).

Por exemplo, para que as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & d \\ c & -5 \end{pmatrix}$ sejam iguais, devemos ter: $\begin{cases} a = 3 \\ 1 = d \\ 2 = c \\ b = -5 \end{cases}$

Exercício resolvido

2. Para que valores de *m* vale a igualdade $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & m+1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m^2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2m+1 \end{pmatrix}$?

Solução:

Devemos impor que os elementos correspondentes sejam iguais. Temos:

$$\begin{cases} 0 = 1 - m^2 & \Rightarrow & m = -1 \text{ ou } m = 1 \; (1) \\ m + 1 = 0 & \Rightarrow & m = -1 \; (2) \\ -1 = 2m + 1 & \Rightarrow & m = -1 \; (3) \end{cases}$$

Como as condições (1), (2) e (3) devem ser satisfeitas simultaneamente, o valor de *m* é -1.

Exercícios

16. Determine *a*, *b*, *c* e *d* para que se tenha

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ d & 6 \end{pmatrix}$$

17. Determine *x*, *y* e *z* que satisfaçam

$$\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 4 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & z \\ z^2 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Em cada item determine, caso exista, o número real m que satisfaz a igualdade:

a) $\begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 1-m & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2m \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 9-m^2 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 7 \end{pmatrix}$

19. Determine os valores de p e q de modo que as matrizes $\begin{pmatrix} p+q & -2 \\ 0 & 2p-q \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sejam iguais.

20. Seja $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em que $a_{ij} = i + j$. Determine m, n e p em $B = \begin{pmatrix} m+n & 3 & m-2p \\ n+1 & n-p & 5 \end{pmatrix}$, a fim de que tenhamos $A = B$.

21. Determine os valores de a, b, c, d, e e f que tornam verdadeira a igualdade:

$$\begin{bmatrix} a+3 & b+2 & c+1 \\ d & 5-e & 2f \end{bmatrix}^t = 0_{3 \times 2}$$

22. Uma matriz quadrada A é dita simétrica quando $A = A^t$.

a) Entre as matrizes seguintes, quais são simétricas?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \pi & \cos \pi \\ \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} & \cos \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}$$

b) Sabendo que a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & y \\ x & -2 & 5 \\ 3 & z & 1 \end{pmatrix}$ é simétrica, qual é o valor de $x + 2y - z$?

Adição de matrizes

Introdução

As tabelas abaixo representam as vendas, em uma concessionária, de dois veículos 0 km, modelos A e B, de acordo com o tipo de combustível, durante os dois primeiros meses de determinado ano:

Janeiro			
Modelo \ Combustível	Flex	Gasolina	Álcool
A	4453	1985	415
B	2693	1378	289

Fevereiro			
Modelo \ Combustível	Flex	Gasolina	Álcool
A	5893	2031	531
B	3412	1597	402

De que maneira podemos determinar as vendas de cada tipo de veículo no primeiro bimestre desse ano? Intuitivamente, sabemos que é preciso somar os elementos correspondentes das tabelas anteriores. Usando matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} 4453 & 1985 & 415 \\ 2693 & 1378 & 289 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5893 & 2031 & 531 \\ 3412 & 1597 & 402 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10346 & 4016 & 946 \\ 6105 & 2975 & 691 \end{bmatrix}$$

Definição

Dadas duas matrizes do mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a soma de A com B (representa-se por A + B) é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Em outras palavras, a matriz soma C é do mesmo tipo que A e B e é tal que cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de A e B. Observe os exemplos a seguir.

- $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & \frac{5}{2} \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

Exercício resolvido

3. Resolver a equação matricial A + X = B, sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

Solução:

Uma equação matricial é aquela em que a incógnita é uma matriz.

A matriz procurada é do tipo 2 × 3 e podemos representá-la por $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$.

Temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$\begin{bmatrix} 3+a & 2+b & 1+c \\ -1+d & -4+e & 2+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Do conceito de igualdade, vem:

$3 + a = 7 \Rightarrow a = 4$ $\quad$ $2 + b = 5 \Rightarrow b = 3$ $\quad$ $1 + c = 1 \Rightarrow c = 0$

$-1 + d = 1 \Rightarrow d = 2$ $\quad$ $-4 + e = 6 \Rightarrow e = 10$ $\quad$ $2 + f = 7 \Rightarrow f = 5$

Logo, $X = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$.

Propriedades

Sendo A, B e C matrizes do mesmo tipo $(m \times n)$ e $0_{m \times n}$ a matriz nula, do tipo $m \times n$, valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes:

I. **Comutativa:** $A + B = B + A$

II. **Associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$

III. **Existência do elemento neutro:** existe M tal que $A + M = A$, qualquer que seja a matriz $A_{(m \times n)}$.
Observe que, nesse caso, M é a matriz nula do tipo $m \times n$.

IV. **Existência do oposto (ou simétrico):** existe A' tal que $A + A' = 0_{m \times n}$.

A demonstração dessas propriedades é simples, uma vez que elas estão diretamente relacionadas às propriedades da adição de números reais.

Para exemplificar, vejamos a demonstração das propriedades II e III.

- Para a propriedade II, dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$, temos que:

$$(A + B) + C = D = (d_{ij})_{m \times n} \quad \text{e} \quad A + (B + C) = E = (e_{ij})_{m \times n}$$

Queremos mostrar que D = E.

Para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, temos que:

$$d_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$$

Usando a propriedade associativa da adição de números reais, podemos escrever:

$$d_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = e_{ij} \text{ e, então, } D = E \text{, isto é, } (A + B) + C = A + (B + C)$$

- Para a propriedade III, de A + M = A, vem: $a_{ij} + m_{ij} = a_{ij}$, para todo *i* e todo *j*, ou seja, $m_{ij} = 0$. Assim $M = 0_{m \times n}$, ou seja, o elemento neutro da adição é a matriz nula do tipo $m \times n$.

Matriz oposta

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Chama-se **oposta de A** à matriz representada por **$-A$**, tal que $A + (-A) = 0_{m \times n}$, sendo $0_{m \times n}$ a matriz nula do tipo $m \times n$.

Observe que a matriz $-A$ é obtida de A trocando-se o sinal de cada um de seus elementos:

- $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; então, $-A = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$.

- $B = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0{,}5 & 5 \end{bmatrix}$; então, $-B = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -0{,}5 & -5 \end{bmatrix}$.

Pense nisto: Se $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é a oposta de $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então $b_{ij} = -a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Subtração de matrizes

Definição

Dadas duas matrizes do mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se diferença entre A e B (representa-se por $A - B$) a matriz soma de A com a oposta de B, isto é:

$$A - B = A + (-B)$$

Observe os casos a seguir:

- $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

Exercício resolvido

4. Resolver a equação $X - A + B = C$, sendo: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solução:

1º modo:

A matriz X procurada é do tipo 3×1, e a representaremos por $X = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$.

Temos:

$$X - A + B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m-1 \\ n+1 \\ p-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m-1 = 2 \Rightarrow m = 3 \\ n+1 = -2 \Rightarrow n = -3 \\ p-3 = 3 \Rightarrow p = 6 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$