Assim, uma relação binária pode ser representada por meio de *um conjunto de pares ordenados*, a saber, o conjunto daqueles pares onde o primeiro é o pai do segundo. Para dar um exemplo, a relação 'x é pai de y' poderia ser representada pelo seguinte conjunto, onde o primeiro elemento de cada par é pai do segundo:

$$\{\langle \text{João}, \text{Maria} \rangle, \langle \text{João}, \text{Antônio} \rangle, \langle \text{Antônio}, \text{Teresa} \rangle, \ldots\}.$$

Se dois indivíduos a e b estão numa relação R, escrevemos que Rab. No caso particular de relações binárias, é também costumeiro colocar o símbolo da relação *entre* os símbolos dos indivíduos: aRb.

Definição: **Uma relação entre dois conjuntos A e B, denotada por R(A, B), é um subconjunto de AxB.**

Dizemos que R é uma *relação sobre A* desde que $R \subseteq A \times A$.

Dizemos que R é uma *relação de A para B* se $R \subseteq A \times B$.

Exemplo 1: Sejam $A=\{1,2,3,4\}$ e $B=\{4,5,6,7\}$.

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ é uma relação sobre A ;

$S=\{(1,2),(3,4)\}$ é uma relação sobre A;

$T=\{(1,4),(1,5),(4,7)\}$ é uma relação de A para B;

$U=\{(4,4),(5,2),(6,2),(7,3)\}$ é uma relação de B para A;

$V=\{(1,7),(7,1)\}$ é uma relação, mas não de A para B nem de B para A, nem sobre A e nem sobre B.

Há duas maneiras de apresentarmos uma relação:

* A primeira é apresentando o subconjunto de AxB, através de seus pares ordenados (vide exemplo 1).

* A segunda é definindo uma regra, na qual escolhemos os pares ordenados que satisfazem esta regra.

Relações a partir de uma regra:

* Sejam A=$\Re$ e B=$\Re$ e a regra P(x,y): x é menor que y. O conjunto **R={(a,b):a,b$\in\Re$ e a<b} é uma relação sobre $\Re$.**

* Sejam A=N e B=N e a regra P(x,y): x é divisível por y. O conjunto **R={(a,b): b divide a} é uma relação sobre N.**

Chama-se Domínio de R o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

Chama-se Imagem de R o conjunto IM de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

Se um par **(a,b) está numa relação R**, dizemos que a está relacionado com b pela relação R e denotaremos este fato por **aRb ou (a,b)**$\in$R .

Relação Inversa

Se R é uma relação de A para B, dizemos que $R^{-1}=\{(b,a): aRb\}$ é a relação inversa de R.

Exemplo 2: Sejam $A=\{a, b, c\}$, $B=\{1, 2, 3,4, 7\}$.

a) Se $R=\{(a,1),(a,2),(a,3),(c,3)\}$, então

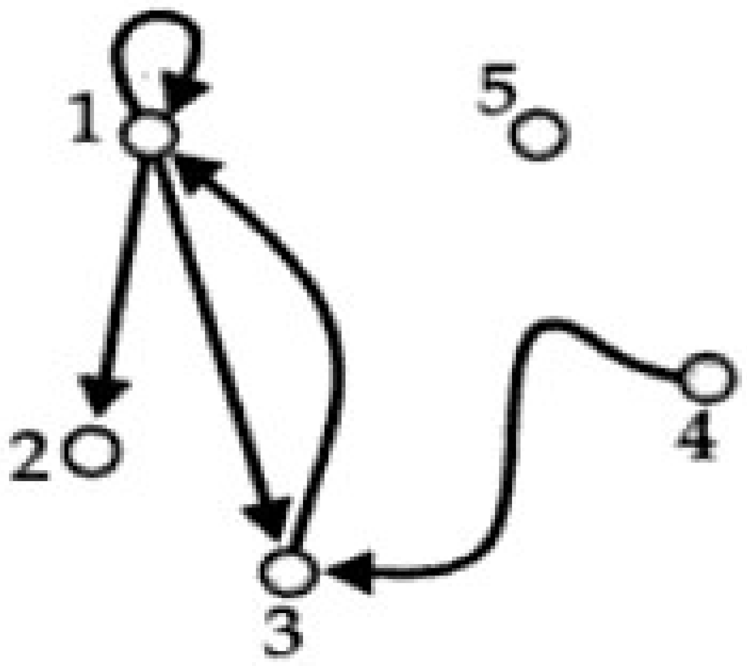
$$R^{-1}=\{(1,a), (2,a),(3, a), (3,c)\}.$$

b) Se $R=\{(1,3), (2,3), (4,4), (7,3)\}$ então

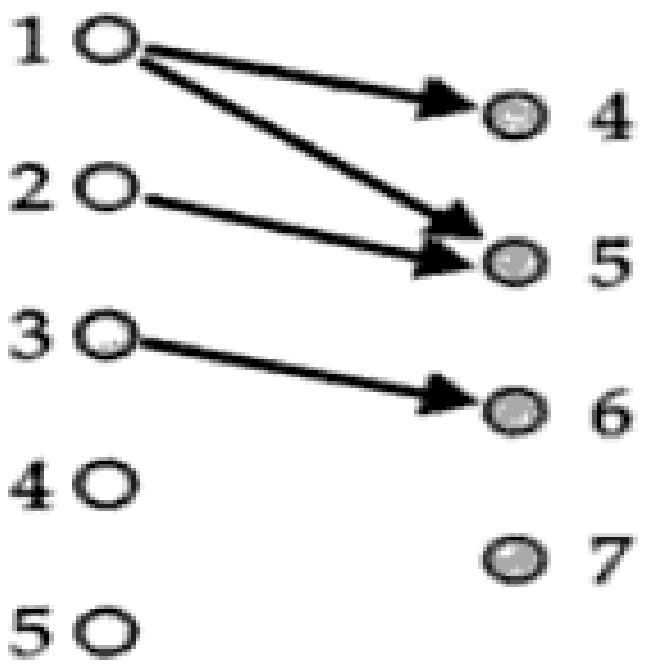
$$R^{-1}=\{(3,1), (3,2),(4, 4), (3,7)\}.$$

Representação geométrica de uma relação sobre A

Sejam $A=\{1,2,3,4,5\}$ e $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(4,3)\}$.



Para traçar uma imagem de uma relação de A para B, traçamos dois conjuntos de pontos. O primeiro conjunto de pontos corresponde aos elementos em A; colocamos esses pontos à esquerda da figura. Os pontos correspondentes a B aparecem à direita. Traçamos, então, uma seta de $a \in A$ para $b \in B$ sempre que (a, b) estiver na relação. Por exemplo, sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $R = \{4, 5, 6, 7\}$, e S a relação $\{(1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$. A segunda figura ilustra a relação S.



Trace ilustrações das seguintes relações:

a) Seja $A = \{a \in \mathbb{N} : a \mid 10\}$ e seja R a relação $\mid$ (divide) restrita a A.

b) Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja R a relação *menor do que* restrita a A.

c) Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja R a relação $=$ (igual) restrita a A.

d) Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Consideremos a relação $\geq$ (maior do que ou igual a) de A para B.

e) Sejam $A = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e seja $R = \{(a, b): a \in A, b \in B, a \mid b\}$.

Composição de Relações

Sejam A, B e C conjuntos, R uma relação de A para B e S uma relação de B para C. Assim, R é subconjunto de AxB e S é subconjunto de BxC. Então, R e S originaram uma relação de A para C, denotada por R_0S:

$$a(R_0S)c \text{ se para algum } b \in B \text{ temos } aRb \text{ e } bSc$$

$$R_0S=\{(x,z) : \text{existe } y \in B \text{ tal que } (x,y) \in R \text{ e } (y,z) \in S\}$$

Exemplo 2.5 Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$ e seja

$$R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\} \text{ e } S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}.$$

Propriedades de Relações

a) Se para todo $x \in A$, $(x,x) \in R$; dizemos que R é **reflexiva**.

b) Dados x, $y \in A$, se $(x,y) \in R$ então $(y,x) \in R$; dizemos que R é **simétrica**.

b) Dados x, $y \in A$, se $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$ então $x=y$; dizemos que R é **antisimétrica**.

c) Dados x, y, $z \in A$, se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$ então $(x,z) \in R$; dizemos que R é **transitiva**.

Exemplo 2.7 Considere as seguintes cinco relações:

(1) Relação $\leq$ (menor ou igual) no conjunto $\mathbf{Z}$ dos inteiros.
(2) Inclusão de conjuntos $\subseteq$ numa coleção $\mathcal{C}$ de conjuntos.
(3) Relação $\perp$ (perpendicularidade) em um conjunto L de retas no plano.
(4) Relação $\parallel$ (paralelismo) em um conjunto L de retas no plano.
(5) Relação $|$ de divisibilidade no conjunto $\mathbf{N}$ de inteiros positivos. (Lembre que $x|y$ se existe um z tal que $xz = y$.)

Determine quais das relações são reflexivas.

RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Considere um conjunto não vazio S. Uma relação R em S é uma *relação de equivalência* se R é reflexiva, simétrica e transitiva. Isto é, R é uma relação de equivalência em S se tem as seguintes três propriedades:

(1) Para todo $a \in S$, aRa.

(2) Se aRb, então bRa.

(3) Se aRb e bRc, então aRc.

10. Sejam $A=\{1,4,9\}$ e $B=\{-2,2,3\}$. Represente por extensão e em diagrama de flechas as relações:

a) $R_1 = \{(x, y) \in AxB : x + y \leq 6\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in AxB : y^2 = x\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in AxB : x - y > 3\}$

d) $R_4 = \{(x, y) \in BxA : x = y\}$

e) $R_5 = \{(x, y) \in BxA : x < 3\}$

f) $R_6 = \{(x, y) \in BxA : y + x = 4\}$

g) $R_7 = \{(x, y) \in B^2 : x < 0 \text{ e } y < 0\}$

h) $R_8 = \{(x, y) \in A^2 : x + y > 4\}$

21. Verifique se a relação R sobre o conjunto de todas as páginas Web satistaz as propriedades reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva, sabendo-se que $(x,y) \in R$, se e somente se:

(a) Todas as pessoas que visitam a página Web x também visitam a página Web y.

(b) Não existem links comuns na página Web x e na página Web y.

(c) Existe pelo menos um link em comum na página Web x e na página Web y.

14. Seja A um conjunto de pessoas. Definem-se em A as relações binárias:

aRb se e somente se b "é pai de" a.

aSb se e somente se b "é irmão de" a.

aTb se e somente se b "é marido de" a.

Qual o grau de parentesco entre a e b se:

(a) $a(R \circ S)b$ (b) $a(T \circ R)b$ (c) $a(T \circ S)b$ (d) $a(S \circ R)b$ (e) $a(R \circ T)b$