Equações Definição e propriedades

Propriedades

Sejam u, v, w, e z números reais, variáveis ou expressões algébricas.

1. Reflexiva	$u = u$
2. Simétrica	Se $u = v$ então $v = u$.
3. Transitiva	Se $u = v$ e $v = w$ então $u = w$.
4. Adição	Se $u = v$ e $w = z$ então $u + w = v + z$.
5. Multiplicação	Se $u = v$ e $w = z$ então $u \cdot w = v \cdot z$.

Resolução de equações

Uma **solução de uma equação em *x*** é um valor de x para o qual a equação é verdadeira.

Resolver uma equação em *x* significa encontrar todos os valores de x para os quais a equação é verdadeira, isto é, encontrar todas as soluções da equação.

Prove que $x = -2$ é uma solução da equação $x^3 - x + 6 = 0$.

SOLUÇÃO

$$(-2)^3 - (-2) + 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$-8 + 2 + 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0$$

Equações lineares com uma variável

Uma **equação linear em *x*** é aquela que pode ser escrita na forma

$$ax + b = 0$$

onde a e b são números reais com $a \neq 0$.

EXEMPLOS

$$3x = 24 \qquad 4x = -16$$

$$3t - 4 = 8 \qquad 2t - 9 = 3$$

$$2x - 3 = 4x - 5 \qquad 4 - 2x = 3x - 6$$

$$4 - 3y = 2(y + 4) \qquad 4(y - 2) = 5y$$

Resolva $2(2x - 3) + 3(x + 1) = 5x + 2.$

SOLUÇÃO

$$2(2x - 3) + 3(x + 1) = 5x + 2$$

$4x - 6 + 3x + 3 = 5x + 2$ → Propriedade distributiva

$7x - 3 = 5x + 2$ → Combinar (somar) termos semelhantes

$2x = 5$ → Somar (-3) em ambos os lados da igualdade

$x = 2{,}5$ → Multiplicar por $\frac{1}{2}$ ambos os lados da igualdade

Resolva $\dfrac{5y-2}{8} = 2 + \dfrac{y}{4}$.

Multiplicar ambos os lados da equação por este mmc

SOLUÇÃO

Os denominadores são 8, 1 e 4. O mínimo múltiplo comum é 8.

$$\frac{5y-2}{8} = 2 + \frac{y}{4} \longrightarrow 8\left(\frac{5y-2}{8}\right) = 8\left(2 + \frac{y}{4}\right)$$

$$8 \cdot \frac{5y-2}{8} = 8 \cdot 2 + 8 \cdot \frac{y}{4} \longrightarrow 5y - 2 = 16 + 2y \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 5y = 18 + 2y \longrightarrow 3y = 18 \longrightarrow y = 6$$

Propriedade do fator zero:
Sejam a e b números reais.

Se ab=0 então a=0 ou b=0

Resolva a equação $2x^2 - 3x - 2 = 0$

SOLUÇÃO

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \longrightarrow (2x + 1)(x - 2) = 0$$

Podemos concluir que

$$2x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0$$

ou seja,

$$x = -1/2 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

$x = -1/2$ e $x = 2$ são as soluções exatas da equação original.

DEFINIÇÃO Equação quadrática em x

Uma **equação quadrática em x** é aquela que pode ser escrita na forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde a, b e c são números reais com $a \neq 0$.

Resolva $(2x - 1)^2 = 9$ algebricamente.

SOLUÇÃO

$$(2x - 1)^2 = 9$$

$$2x - 1 = \pm 3$$

Extrair a raiz quadrada em ambos os lados da igualdade

$$2x = 4 \quad \text{ou} \quad 2x = -2$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

Completando o quadrado

Para resolver $x^2 + bx = c$ por meio do procedimento de completar o quadrado

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}$$

Adicionar $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ em ambos os lados da equação, daí fatoramos o lado esquerdo da nova equação

Resolva $4x^2 - 20x + 17 = 0$ pelo procedimento de completar o quadrado.

SOLUÇÃO

$$4x^2 - 20x + 17 = 0$$

$$x^2 - 5x + \frac{17}{4} = 0$$

$$x^2 - 5x = -\frac{17}{4}$$

$$x^2 - 5x + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{17}{4} + \left(-\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 2 \longrightarrow x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{2}$$

$$x = \frac{5}{2} + \sqrt{2} \cong 3{,}91 \text{ ou } x \cong \frac{5}{2} - \sqrt{2} \cong 1{,}09$$

Fórmula quadrática (conhecida como Fórmula de Bhaskara)

As soluções da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, são dadas pela **fórmula**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula de Bhaskara

Resolva a equação $3x^2 - 6x = 5$.

SOLUÇÃO

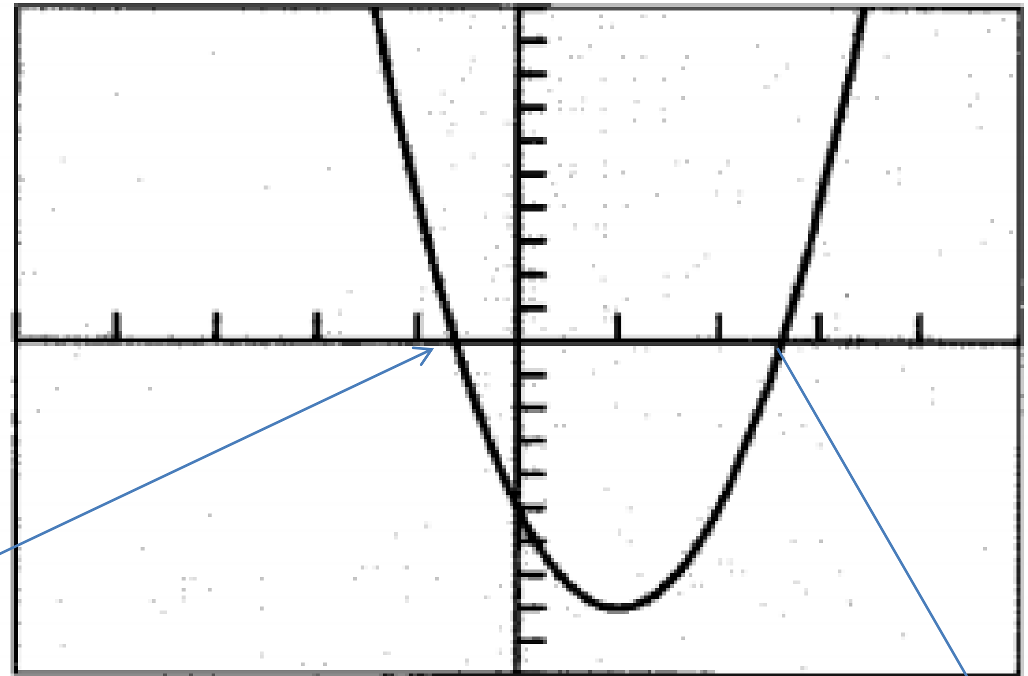
$3x^2 - 6x - 5 = 0$ $\boxed{a = 3, b = -6 \text{ e } c = -5.}$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)} \qquad \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{96}}{6}$$

$$x = \frac{6 + \sqrt{96}}{6} \cong 2{,}63 \quad \text{ou} \quad x = \frac{6 - \sqrt{96}}{6} \cong -0{,}63$$

$$x = \frac{6 - \sqrt{96}}{6}$$



[−5, 5] por [−10, 10]

Figura 5.3 O gráfico de $y = 3x^2 - 6x - 5$.

$$x = \frac{6 + \sqrt{96}}{6}$$

a>0, concavidade da parábola para cima

a<0, concavidade da parábola para baixo

Resolução algébrica de equações quadráticas

Existem quatro caminhos básicos para resolver equações quadráticas algebricamente.

1. **Fatoração** (veja o Exemplo 4)
2. **Extração de raízes quadradas** (veja o Exemplo 5)
3. **Procedimento de completar o quadrado** (veja o Exemplo 6)
4. **Uso da fórmula quadrática (conhecida como fórmula de Bhaskara)** (veja o Exemplo 7)

Módulo de um número real

$$|x| = \begin{cases} x, \text{se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos:

$|2| = 2, |5| = 5, |-7| = 7, |-10| = 10$

$|x + 4| = 2?$ $|2y - 5| = -3?$

Note que o módulo de um número real geometricamente significa a distância deste número a origem.

Exemplo: Resolva as seguintes equações.

$$|2x + 4| = 7, \quad |3x - 1| = 2x + 1,$$

$$|2x - 3| = x^2$$

Solução: Para o Leitor