INTRODUÇÃO A TEORIA DE ERROS

Profa. Msc. Terezinha Saes de Lima
Instituto Tecnológico de Aeronáutica ITA
Centro Técnico Aeroespacial – CTA
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50.
Vila das Acácias, São José dos campos – SP.
tereza@ita.br

Resumo. *Quando procuramos obter resultados através de observações experimentais, devemos ter sempre à mente que nossas observações serão sempre limitadas, no sentido de que jamais retratam com perfeição absoluta a natureza observada. Dessa forma, quando relatamos o resultado da medição de uma grandeza, é de suma importância sabermos quantificar a qualidade do resultado, ou seja, precisamos informar quão boa foi a nossa medição. Para entender como isso deve ser feito, introduziremos alguns conceitos fundamentais (Stempiniak, 1997), e depois abordaremos os itens mais relevantes da Teoria de Erros (Vuolo, 1995).*

Palavras chaves***: Desvios, Erros, Algarismos Significativos, Propagação de incertezas, Gráficos.***

1. Definições e conceitos importantes

As definições aqui apresentadas foram extraídas do Guia da Incerteza de Medição, 2003.

- Medição: Conjunto de operações que têm por objetivo determinar o valor de uma grandeza.
- Mensurando: Grandeza específica submetida à medição. A especificação de um mensurando pode requerer a informação de outras grandezas, como temperatura, pressão, etc...
- Resultado de uma medição: Valor atribuído ao mensurando, obtido por medição. Uma expressão completa do resultado inclui informações sobre a incerteza da medição.
- Valor verdadeiro: Valor consistente com a definição de uma dada grandeza específica. É o valor que seria obtido por uma medição perfeita.
- Erro: Resultado de uma medição menos o valor verdadeiro.
- Desvio padrão experimental: Resultado que caracteriza a variabilidade dos resultados de uma série de medições, ou melhor, caracteriza a dispersão (em torno da média) dos resultados de uma série de medições.
- Incerteza de medição: Parâmetro, associado ao resultado da medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos a um mensurando.
- Repetitividade: Grau de concordância entre resultados de medições sucessivas de um mesmo mensurando, efetuadas sob as mesmas condições de mediçã.
- Valor médio verdadeiro: É o valor médio que seria obtido de um número infinito de observações feitas em condições de repetitividade.
- Erro estatístico ou aleatório: É o resultado de uma medição menos a média que resultaria de um número infinito de medições de um mesmo mensurando, efetuadas sob condições de repetitividade.
- Erro sistemático: Média que resultaria de um número infinito de medições de um mesmo mensurando, menos o valor verdadeiro do mensurando.
- Incerteza padrão: Incerteza do resultado de uma medição expressa com um desvio padrão.

- Nível de confiança: Indica a probabilidade que um resultado estar correto.
- Exatidão: Grau de concordância entre o resultado de uma medição e o valor verdadeiro do mensurando.
- Precisão: Indica o grau de concordância entre os diversos resultados experimentais obtidos em condições de repetitividade.

É comum ocorrer certa confusão entre os conceitos de precisão e exatidão. Vamos, pois, torná-los mais claros através de um exemplo:

"Em uma competição de tiro ao alvo, um competidor conseguiu que todos os seus tiros ficassem distribuídos de maneira dispersa em torno do alvo central. Um segundo atirador, teve uma outra habilidade: conseguiu concentrar todos os seus tiros em uma certa região localizada ao lado do alvo central. Apesar de seus tiros ficarem todos concentrados, não conseguiu atingir o alvo central. Já um terceiro competidor teve a destreza necessária para conseguir concentrar todos os tiros exatamente em cima do alvo".

Nesse exemplo, o primeiro atirador efetuou disparos poucos precisos, pois seus tiros ficaram todos dispersos em torno do alvo central. O segundo atirador conseguiu atirar de maneira bastante precisa, pois seus tiros ficaram bem concentrados. Em contrapartida, por não ter conseguido acertar o alvo, os disparos do segundo atirador não foram exatos. Já o terceiro competidor conseguiu concentrar duas habilidades: tiros exatos e precisos. Os tiros foram exatos porque atingiram o alvo e foram precisos porque todos ficaram bem concentrados (houve pouca dispersão).

2. Tipos de Erros.

Existem dois tipos de erros que podem ocorrer em uma medição. Considere que, em um certo experimento, tenham sido efetuadas n medições. Certamente os n resultados não serão idênticos. Podemos identificar, no experimento realizado, algumas fontes de erro.

2.1. Erro estatístico

É o erro que resulta de uma flutuação no resultado da medição .É o erro que resulta de uma variação aleatória no resultado da medição que, por algum motivo, não podem ou não são controlados. Uma corrente de ar, por exemplo, pode gerar um erro. Exemplo: quando medimos a massa através de uma balança, algumas correntes de ar ou mesmo vibrações podem introduzir este tipo de erro.

2.2. Erro sistemático

O erro sistemático presente nos resultados é sempre o mesmo quando a medição é repetida. Assim, o efeito de um erro sistemático não pode ser avaliado simplesmente repetindo medições, sendo, pois, bem mais difícil de ser estimado. Os erros sistemáticos podem ser classificados em:

(a) Erro sistemático instrumental: está relacionado com a calibração do instrumento.

(b) Erro sistemático ambiental: é um erro devido a efeitos do ambiente sobre o experimento. Os fatores que podem gerar esse tipo de erro são: temperatura, pressão, umidade, aceleração da gravidade, campo magnético da Terra, luz, entre outros.

(c) Erro sistemático observacional: é o erro sistemático devido a falhas de procedimento ou devido à imperícia do observador. Um observador que não lê adequadamente o ponteiro de um medidor pode introduzir este tipo de erro no experimento.

3. Algarismos significativos

As medições de uma certa grandeza nunca exprimem com certeza o valor verdadeiro desta grandeza: por mais preciso que tenha sido o processo de medição, existe sempre uma incerteza intrínseca associada a este processo. Convém, então, saber quão certo é o resultado obtido e como se deve expressá-lo de maneira correta. Para tanto, uma das preocupações fundamentais a que deve se ater o observador é em expressar sua resposta com a quantidade correta de algarismos.

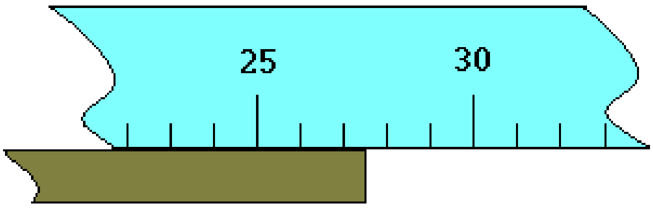

Figura 1: Medição do comprimento de uma Barra Metálica (exemplo ilustrativo).

Por exemplo, (Fig.1) considere alguém que, munido de uma régua milimetrada, mede o comprimento de uma barra e observa que este deve estar entre 27mm e 28mm. Sabe-se que o comprimento certamente é 27,x mm, mas nõ se tem certeza. Pode-se especular qual deve ser o valor de x, mas não se pode saber, apenas utilizando a régua, qual deve ser o valor exato de x. Alguém poderia dizer que seria 27,5mm, enquanto que outra pessoa poderia dizer que seria 27,8mm. Em resumo, nesta medição efetuada tem-se certeza em dois algarismos (2 e 7), e o terceiro algarismo (x) é duvidoso. Os algarismos dos quais se tem certeza são chamados de algarismos exatos, e o algarismo do qual não se tem certeza é dito algarismo duvidoso. Os algarismos exatos mais o duvidoso compõem os algarismos significativos de uma grandeza. Note que, no exemplo, o resultado 27,5mm teria três algarismos significativos (os algarismos 2, 7 e 5), sendo dois exatos (os algarismos 2 e 7) e um duvidoso (o algarismo 5). Voltando ao exemplo da medição do comprimento da barra, note que não faria sentido algum alguém apresentar como resposta de sua medição o valor 27,75mm. Isso porque não se tem certeza quanto ao primeiro número que aparece depois da vírgula (o algarismo 7 já é duvidoso), não sendo, pois, coerente apresentar mais um algarismo depois daquele que já é duvidoso.

3.1. Operações com algarismos significativos

Como já foi dito, quando efetuamos medições, nunca temos certeza se o valor aferido corresponde, de fato, ao valor verdadeiro daquilo que medimos. Logo, existe um limite na quantidade de algarismos significativos em nossas respostas, já que sempre existe um “algarismo duvidoso”.

Nos processos de medições, podemos avaliar a quantidade de algarismos significativos de nossas respostas através:

- da sensibilidade e precisão do instrumento com o qual fazemos a medição;
- da perícia do observador;
- da incerteza associada à grandeza que medimos.

No exemplo anterior da escala milimetrada, vimos que não é conveniente expressarmos a resposta de uma medição como sendo 27,75mm, ou seja, ou damos a resposta como 27,7mm ou como 27,8mm (a regra de arredondamento será apresentada depois). Mas se esta medição fosse realizada com outro equipamento, como um paquímetro digital (INMETRO,1995), não é absurda a resposta 27,75mm. Isso porque este tipo de aparelho permite tal precisão. Normalmente, quando vamos expressar o valor de uma grandeza, a quantidade de algarismos significativos de nossa resposta ficará sujeita à incerteza existente em tal grandeza. Isso será discutido adiante.

3.2. Contagem dos Algarismos Significativos.

No caso do nosso exemplo do comprimento da barra, é fácil ver que:

- 27,5mm (medição com a escala) é um número que tem 3 algarismos significativos;
- 27,75mm (medição feita com o paquímetro digital) é um número que tem 4 algarismos signifcativos (note que agora os números 2, 7 e 7 compõem os algarismos exatos, enquanto que o algarismo 5 é duvidoso).

Imagine, porém, que tivéssemos que saber quantos algarismos significativos tem o número 0,00129. Quando é necessário contar os algarismos significativos, ou mesmo expressar um resultado, o mais conveniente é expressar em notação científica, pois fica imediato o reconhecimento da quantidade de algarismos significativos. Assim:

$$0{,}00129 = 1{,}\ 29 \times 10^{-3}$$

com a notação acima, reconhecemos que o número possui 3 algarismos significativos.

A seguir, alguns exemplos para elucidar esse conceito:

$1012 = 1{,}012 \times 10^{3}$ (quatro algarismos significativos)
$0{,}012 = 1{,}2 \times 10^{-2}$ (dois algarismos significativos)
$1{,}3 \times 10^{-2}$ (dois algarismos significativos)
$130 = 1{,}30 \times 10^{2}$ (três algarismos significativos)
$0{,}11 = 1{,}1 \times 10^{-1}$ (dois algarismos significativos)
Note que as quantidades de algarismos significativos de 0,11 e 0,110 não são as mesmas, assim como as de 8,5 e 8,50, 100 e 100,0.

3.3. Operações matemáticas com algarismos significativos

Recorrendo ao exemplo da barra, imagine que queiramos determinar a razão de seu comprimento por sua espessura. O comprimento, medido com uma escala milimetrada, foi registrado como 27,5mm. Para a espessura, medida posteriormente com a mesma escala, foi encontrado o valor de 12,0mm. Se fizermos os cálculos com uma calculadora, obtemos um valor para a razão igual a R = 2,291666666.... Nesse caso, pode surgir a pergunta: com quantos algarismos significativos devemos expressar a nossa resposta para R? Para responder a essa pergunta, devemos contar os algarismos significativos dos operandos e depois aplicar a seguinte regra:

- no caso de adição e subtração: em geral, a resposta não deve ter mais casas decimais que a parcela mais pobre em casas decimais. No caso de adição e subtração o bom senso acaba sendo a arma mais eficaz para expressar a resposta com a quantidade correta de algarismos significativos.
- no caso da multiplicação e divisão e em geral das outras operações: a quantidade de algarismos significativos da resposta é igual à quantidade de significativos do operando que tiver a menor quantidade de algarismos significativos.

Exemplos:

- 1,6 + 2,39 + 500,004. Fazendo os cálculos, obtém-se: 503,994. Porém, aplicando o bom senso, notamos que a primeira parcela (1,6) nos leva a conclusão de que o primeiro dígito depois da vírgula é duvidoso. Logo, na resposta final, o primeiro dígito após a vírgula já sendo duvidoso, não faz sentido expressar as demais casas decimais. Devemos arredondar a resposta, então, para: 504,0 (as regras de arredondamento serão dadas posteriormente, Vuolo, 1995).

- 1,506 x 50,5. Fazendo os cálculos: 76,053. Utilizando a regra, verificamos que a resposta deve ter somente 3 algarismos significativos, ou seja, a resposta é: 76,1. Note que se tivéssemos arredondado os operandos antes de multiplicarmos, obteríamos uma outra resposta. Portanto, não devemos arredondar os operandos antes de efetuarmos a operação.
- 250 x sen(15°). Fazendo os cálculos: 64,70476... Utilizando, porém, a regra proposta, concluímos que o resultado é $6{,}5\text{x}10^1$.

Voltando ao nosso exemplo sobre o cálculo da razão entre o comprimento da barra e a espessura, observando a regra anterior, obtemos R = 2,29.
OBS: essas regras fornecem uma maneira bastante prática de obter uma resposta com a quantidade correta de algarismos significativos. Entretanto, o processo mais criterioso para trabalhar corretamente com os algarismos significativos envolve a teoria de propagação de incertezas.

3.4. Critérios para arredondamento

Quando aparecer a necessidade de efetuar algum arredondamento, podemos apelar normalmente ao bom senso, arredondando sempre para o "número mais próximo". Assim, quando precisamos arredondar 64,70476 para um número com somente dois algarismos significativos, podemos nos perguntar: arredondar para 64 ou para 65? Todavia, se observarmos o número 64,70476, constatamos que ele está mais próximo de 65 do que de 64. Logo a resposta do arredondamento é 65. Nos casos gerais, podemos estabelecer a seguinte regra: quando for necessário arredondar um número ::::W;ZY Xabcd:::, sendo "abcd" os algarismos que devem ser retirados ("cortados"):

- se "abcd" estiver entre 0000 e 4999, então arredondamos para baixo;
- se "abcd" estiver entre 500...01 e 9999, então arredondamos para cima;
- se "abcd" for 500...000, arredondamos de modo que o algarismo X, após o arredondamento, seja par.

A seguir, damos alguns exemplos em que os números foram arredondados para obter uma resposta final com três significativos:

$$17{,}365 \rightarrow 17{,}4; \quad 0{,}010239 \rightarrow 0{,}0102; \; 2{,}645 \rightarrow 2{,}64; \; 2{,}693 \rightarrow 2{,}69$$

4. Cálculo de erros

4.1. Valor médio do mensurando

Dado um conjunto de n medições cujos resultados foram: $\mathbf{y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_n}$, o valor médio dos n resultados é dado por:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

O valor médio verdadeiro de um conjunto de medições é o valor médio que seria obtido quando fossem feitas infinitas observações. Em fins práticos, é impossível levantar infinitas medições de um mensurando. Logo, para um número finito n, o valor médio nos fornece a melhor estimativa do valor médio verdadeiro, sendo esta estimativa tão melhor quanto maior for o número de observações n. Em geral, o valor médio é o que melhor representa a grandeza medida.

4.2. Desvios

Para o nosso interesse, podemos tratar de dois tipos de desvios: Desvio padrão experimental e Desvio padrão do valor médio.

4.2.1. Desvio padrão experimental

Para um conjunto de n medições, o desvio padrão experimental é um parâmetro que caracteriza quão dispersos estão os valores obtidos. Isso significa que se os resultados forem bastante próximos uns dos outros, então o desvio padrão será "pequeno", e se os resultados forem dispersos, o desvio padrão será "grande".

O desvio padrão experimental pode ser calculado através de:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

4.2.2. Desvio padrão do valor médio

Como já vimos, para conhecer o valor médio verdadeiro, seria necessário efetuar infinitas medições. Como, na prática, isso não é possível, então sabemos que a média é apenas uma estimativa do valor médio verdadeiro. Nesse contexto, o desvio padrão do valor médio é um parâmetro que informa quão bem a média das observações é uma estimativa do valor médio verdadeiro. Qualitativamente, valores "pequenos" de desvio padrão do valor médio estão associados a boas estimativas do valor médio verdadeiro; ao contrário, elevados valores representam que a média não é uma boa estimativa do valor médio verdadeiro. O desvio padrão do valor médio é calculado através de:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

5. Incerteza

5.1. Intervalos de confiança

Se efetuássemos infinitas medições de uma certa grandeza, não obteríamos o mesmo resultado em todas elas. Existe sempre uma dispersão dos valores que ocorre devido a erros aleatórios, e que, portanto, foge ao nosso controle. Nesse caso, sendo y o valor médio encontrado, constata-se, que aproximadamente 68,27% dos resultados encontrados estaria no intervalo $\bar{y} \pm \sigma$.

Constata-se também que 50% dos resultados se encontrariam no intervalo $\bar{y} \pm 0{,}674\sigma$. Desse modo, se multiplicamos o desvio padrão experimental por um certo valor k, o intervalo $\bar{y} \pm k\sigma$ irá conter uma certa porcentagem dos resultados obtidos. Essa porcentagem é chamada de nível de confiança, enquanto que o intervalo a ela associado é denominado intervalo de confiança. Para o caso de infinitas medições, a Tab. 1 nos fornece quais são os intervalos de confiança associados a um determinado nível de confiança.

Tabela 1: Intervalos de confiança para um número de medições muito grande

Níveis de confiança	Intervalos de confiança
50%	$\pm\ 0{,}674\sigma$
68,27%	$\pm\ 1{,}000\sigma$
80%	$\pm\ 1{,}282\sigma$
90%	$\pm\ 1{,}645\sigma$
95%	$\pm\ 1{,}960\sigma$
95,45%	$\pm\ 2{,}000\sigma$
99%	$\pm\ 2{,}576\sigma$
99,73%	$\pm\ 3{,}000\sigma$

Tabela 2: Intervalos de confiança para um número de medições pequeno

Número de observações		Nível de confiança		
		50%	90%	95%
2	I	$\pm\ 1{,}00\sigma$	$\pm\ 6{,}31\sigma$	$\pm\ 12{,}71\sigma$
3	N	$\pm\ 0{,}82\sigma$	$\pm\ 2{,}92\sigma$	$\pm\ 4{,}30\sigma$
4	T	$\pm\ 0{,}77\sigma$	$\pm\ 2{,}35\sigma$	$\pm\ 3{,}18\sigma$
5	E	$\pm\ 0{,}74\sigma$	$\pm\ 2{,}13\sigma$	$\pm\ 2{,}78\sigma$
6	R	$\pm\ 0{,}73\sigma$	$\pm\ 2{,}02\sigma$	$\pm\ 2{,}54\sigma$
7	V	$\pm\ 0{,}72\sigma$	$\pm\ 1{,}94\sigma$	$\pm\ 2{,}45\sigma$
8	A	$\pm\ 0{,}71\sigma$	$\pm\ 1{,}90\sigma$	$\pm\ 2{,}37\sigma$
9	L	$\pm\ 0{,}71\sigma$	$\pm\ 1{,}86\sigma$	$\pm\ 2{,}31\sigma$
10	O	$\pm\ 0{,}70\sigma$	$\pm\ 1{,}83\sigma$	$\pm\ 2{,}26\sigma$
16	S	$\pm\ 0{,}69\sigma$	$\pm\ 1{,}75\sigma$	$\pm\ 2{,}13\sigma$

Note que a Tab. 1 mostra os intervalos de confiança para o caso em que foram levantados um número infinito de medições. Na prática, porém, nunca conseguimos atingir tal situação, sempre fazemos um número finito de medições. Nesse caso, para um dado nível de confiança, o intervalo de confiança associado ao mesmo depende do número de observações. Essa dependência está mostrada na Tab. 2.

5.2. Incerteza padrão final

Até agora, ainda não informamos como deve ser relatado o valor de uma grandeza submetida a medições. Já sabemos, a princípio, a grandeza pode ser representada, de modo satisfatório, pelo seu valor médio. Porém, quando efetuamos um conjunto de medições devemos ser capazes de informar com qual qualidade a média pode ser uma estimativa do valor verdadeiro. Ou seja, devemos sempre informar uma incerteza associada à média encontrada. Poderíamos pensar, num primeiro nível, que a incerteza possa ser estimada pelo desvio padrão da média. Porém, devemos atentar que o cálculo do desvio padrão da média leva em conta somente as contribuições dos erros aleatórios, e não considera os erros sistemáticos. Existe, pois, uma incerteza residual que ainda não foi considerada. Essa incerteza residual (σ_r), no caso de instrumentos de medição, costuma vir indicada pelo fabricante. Quando não é indicada, podemos adotar, pelo bom senso, que se trata da metade da menor divisão da escala. Assim, o resultado de um conjunto de medições é $y = \bar{y} \pm \sigma_f$ em que σ_f é a incerteza padrão final e pode ser calculada por:

$$\sigma_f = \sqrt{(\sigma_m)^2 + (\sigma_r)^2}$$

6. Propagação de incertezas

Imagine que queiramos fazer a soma de duas grandezas x e y, para obter uma grandeza z. Sabemos que para expressar corretamente o resultado de nossa operação devemos relatar um valor médio e uma incerteza associada a este valor. De maneira geral, um resultado z deve ser expresso como:

$$z = \bar{z} \pm \sigma_z$$

Se z é uma função de outras variáveis, então:

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

No caso da soma, por exemplo, z = x + y, então:

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$$

Já o cálculo de σ_z é mais complicado. O processo rigoroso para o cálculo das incertezas envolve uma equação com derivadas parciais. Apresentamos, a seguir os resultados mais práticos para as aplicações mais comuns:

1. Soma e Subtração: z = x + y ou z = x – y

$$\sigma_z = \sqrt{(\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2}$$

2. Multiplicação e Divisão: z = x y ou z = x / y

$$\frac{\sigma_z}{\bar{z}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\bar{y}}\right)^2}$$

3. Fórmula geral: $z = x^a y^b$

$$\frac{\sigma_z}{\bar{z}} = \sqrt{a^2\left(\frac{\sigma_x}{\bar{x}}\right)^2 + b^2\left(\frac{\sigma_y}{\bar{y}}\right)^2}$$

6.1. Exemplo de um experimento

Consideraremos, aqui, os resultados de um experimento feito com o objetivo de determinar o valor da gravidade local de São José dos Campos. Os dados referentes a este experimento encontram-se disponíveis em www.fis.ita.br/labfis13. Neste exemplo, faremos algumas modifições dos resultados, com finalidades didáticas. O método de medição de g se baseia no modelo do pêndulo simples, que tem período aproximado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

em que L é o comprimento do pêndulo. Neste experimento, foram feitas cinco medições do comprimento L do pêndulo e cinco medições do período do mesmo. Através dessas observações, obteremos o valor da gravidade. Consideremos que os resultados das medições do comprimento L estejam indicadas na Tab. 3.

Tabela 3: Resultados de 5 medições do comprimento L do pêndulo

Determinação (i)	Resultado obtido (m)
1	3,04
2	3,05
3	3,04
4	3,04
5	3,03

Assim, o valor médio obtido foi de L = (3,04 + 3,05 + 3,04+ 3,04 + 3,03) / 5 = 3,04m. O desvio padrão do valor médio vale:

$$\sigma_{m,L} = \sqrt{\frac{1}{20}(0{,}01)^2 + (0{,}01)^2}$$

Se quisermos um nível de confiança de 90%, vemos, pela Tab. 2 que o resultado anterior deve ser multiplicado por 2,13. Assim, para um nível de confiança de 90%: $\sigma_{m,L} = \mathbf{0{,}0067}m$.
Iremos nos preocupar com os arredondamentos na expressão da resposta com a quantidade correta de significativos apenas no final. Falta, agora, considerar a contribuição da incerteza residual. Essa incerteza foi estimada em 0,05m. Logo a incerteza padrão final em L é:

$$\sigma_L = \sqrt{(0{,}0067)^2 + (0{,}05)^2} = 0{,}05m\ .$$

A incerteza é normalmente escrita com um ou dois significativos (existe uma regra, que foi omitida neste texto; maiores detalhes, consultar Vuolo, 1995), ou seja, L = (3,04 ± 0,05)m com 90% de confiança.

Agora, iremos relatar os resultados para o período do pêndulo. As 5 medições efetuadas constam na Tab. 4.

Tabela 4: Resultados de 5 medições do período T do pêndulo.

Determinação (i)	Resultado obtido (s)
1	3,51
2	3,50
3	3,52
4	3,51
5	3,51

Procedemos da mesma maneira como feito para L. Assim, obtemos os seguintes resultados:

$$\overline{T} = 3{,}51s$$

com desvio padrão da média, para um nível de confiança de 90% dado por $\sigma_{m,T} = \mathbf{0{,}0067}\ s$.

A incerteza residual foi estimada em 0,20s, de modo que:

$$T = (3{,}51 \pm 0{,}20)s$$

Agora, iremos calcular o valor da gravidade através dos resultados obtidos anteriormente para o comprimento do pêndulo e o período do mesmo. Vemos que:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

Assim o valor médio de g é:

$$\overline{g} = \frac{4\pi^2 \overline{L}}{\overline{T}^2}$$

Calculamos o erro em g através da Fórmula geral $z = x^a y^b$ apresentada anteriormente:

$$\frac{\sigma_g}{\overline{g}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{\overline{L}}\right)^2 + 2^2\left(\frac{\sigma_T}{\overline{T}}\right)^2}$$

Portanto o resultado é:

$$g = (9{,}7 \pm 1{,}1)m/s^2$$

7. Bibliografia

ABNT, 2003, "Guia para a Expressão da Incerteza da Medição", 3ª Edição Brasileira. INMETRO: Rio de Janeiro.

INMETRO (1995), "Vocabulário Internacional de Termos fundamentais e Gerais de Metrologia". Rio de Janeiro.

Site da internet: http: // www.fis.ita.br/labfis13

Vuolo, J.H. (1995), "Fundamentos da Teoria de Erros". 2ª edição. Edgard Blücher: São Paulo.

8. Sobre a Autora

8.1. Formação Acadêmica

- Mestre em Ciências, área de Física de Plasmas, Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA - CTA) concluído em maio de 1987.
  Título: Difusão Ambipolar em Plasmas
  Orientador: Dr. Ricardo Magnus Osório Galvão
- Bacharel em Física, Universidade Federal Fluminense.
  Concluído em 1983.

8.2. Atividade Profissional

- Professora de Física e Coordenadora do Laboratório de Física do 1º ano de Engenharia do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA - CTA), São José dos Campos - SP.
- Coordenadora da Escola Avançada de Física. do ITA
- Coordenação do Laboratório de Física do 1º ano de Engenharia do ITA
- Responsável por Oficinas no projeto AEB - Escola

8.3. Área de Atuação Em Pesquisa

- Atuação na área de Ensino através da Escola Avançada de Física. Um curso voltado para alunos do terceiro ano do ensino médio que participam de Olimpíadas, com o intuito de preparação para as seguintes olimpíadas de Física: Internacional, Ibero-Americana, Brasileira, Estaduais e Regionais.
- Confecção de Experimentos para as Oficinas do Projeto AEB-Escola, para alunos do Ensino Fundamental e médio, com o intuito de despertar o interesse dos mesmos para a área Espacial.
- Desenvolvimento de Laser $C0_2$ – TEA
- Interação Laser-Plasmas
- Simulação e Extração de íons em plasmas
- Simulação de um Laser de elétrons livres - FEL
- Estudo de Descargas em Plasmas