Lógica

Professor Mauro Cesar Scheer

A **lógica**, ciência do raciocínio dedutivo, estuda a ***relação de conseqüência***, tratando entre outras coisas das ***inferências válidas***, ou seja, das inferências cujas **conclusões têm que ser verdadeiras quando as premissas o são.**

O objetivo da lógica consiste, então, na menção e estudo dos ***princípios lógicos*** usados no ***raciocínio dedutivo***.

A lógica matemática adota como regras fundamentais do pensamento os dois seguintes princípios (ou axiomas):

Princípio da Não Contradição

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Princípio do Terceiro Excluído

Toda proposição ou é verdadeira ou falsa.

Linguagens formais _ Características

Regras de formação são precisamente definidas e as quais podemos atribuir um único sentido, ***sem ambiguidades***.

Podem ter diversos níveis de expressividade. Em geral, **quanto maior a expressividade, maior também a complexidade** de se manipular essas linguagens.

Iniciaremos nosso estudo da lógica a partir de uma ***linguagem proposicional***, que tem uma expressividade limitada, mas já nos permite expressar uma série de relações lógicas interessantes.

Nas linguagens naturais (língua portuguesa) as sentenças podem ser classificadas de diversas formas:

- Interrogativas: Que horas são?
- Imperativas: Lave as roupas agora!
- Declarativas: Joana é uma pessoa legal.
- Exclamativas: Que belo jardim é o desta praça!

Na lógica restringimo-nos a uma classe de proposições, ***as DECLARATIVAS***, ao qual podemos atribuir **um valor de verdade** (verdadeiro ou falso).

Nem toda sentença pode assumir um valor de verdade.

“Esta sentença é falsa.”

Esse tipo de sentença é chamado de **auto-referente** e deve ser excluída da linguagem.

Queremos discutir as leis do raciocínio que envolvem sentenças declarativas, chamadas de **Proposições**. Será necessário, é claro, indicá-las de algum modo. Em geral, usaremos letras latinas como **P, Q, R, p, q, r, s, etc**. Eventualmente poderemos utilizar índices e falar sobre a proposição P1, ou a proposição Q2, etc.

Como na língua portuguesa, proposições podem ser combinadas para formar outras. Se **P e Q são proposições**, então podemos falar de

“**não P**”, “**P e Q**”, “**P ou Q**”, “**se P, então Q**” (1)

“não P” **“P e Q”** **“P ou Q”** **“se P, então Q”**

NEGAÇÃO

DISJUNÇÃO

CONJUNÇÃO

IMPLICAÇÃO

A **negação** será indicada por $\neg$ ou ~ : $\neg P$ é a expressão formal da **negação da proposição P**.

A **conjunção** será indicada por $\wedge$: **$P \wedge Q$** representa a frase “P e Q”, chamada de **conjunção de P e Q**.

A **disjunção** será indicada por $\vee$: **$P \vee Q$** representa a declaração “P ou Q”.

A implicação será indicada por $\rightarrow$; **$P \rightarrow Q$** representa formalmente “se P, então Q”.

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ são chamados conectivos lógicos

Símbolos do alfabeto

1. Um conjunto não vazio At de símbolos, chamados **proposicões atômicas**, indicadas por letras como p, q, r, s ... Como já comentamos antes, podemos usar índices e falar sobre a proposição atômica p1 ou q3, etc.

2. Símbolos para os **conectivos lógicos** : **¬, ∧, ∨,** →

3. Parênteses à direita e à esquerda: **(,)**

Fórmulas da Lógica Proposicional

O conjunto das fórmulas da lógica proposicional, **Form(L)**, é o menor conjunto satisfazendo as regras de formação:

1.Caso básico: Todos os símbolos proposicionais estão em Form(L), i.e, $At \subseteq Form(L)$.

2. Caso Indutivo 1: Se $A \in Form(L)$ então $\sim A \in Form(L)$.

3. Caso Indutivo 2: Se $A, B \in Form(L)$ então $(A \wedge B) \in Form(L)$, $(A \vee B) \in Form(L)$ e $(A \rightarrow B) \in Form(L)$.

Os símbolos proposicionais são chamados de fórmulas atômicas ou átomos.

Se p, q, r são símbolos proposicionais, então:

$$\sim p, \quad \sim\sim r, \quad (p \vee q), \quad ((r \wedge p) \rightarrow q), \quad ((r \rightarrow p) \wedge q)$$

são fórmulas da linguagem proposicional.

Os parênteses mais externos de uma fórmula podem ser omitidos. Podemos escrever , $p \wedge q$ no lugar de $(p \wedge q)$, $(r \wedge p) \rightarrow q$ lugar de $((r \wedge p) \rightarrow q)$.

Expressando idéias com o uso de fórmulas

Utilizando os símbolos: c (criança), j (jovem), a (adulto), i (idoso), e (estudante), t (trabalhador) e s (aposentado). Temos:

- Para expressar que **um jovem trabalha ou estuda**, escrevemos **$j \rightarrow (t \vee e)$**.

- Para expressar **a proibição de que não podemos ter uma criança aposentada**, podemos escrever **$\sim(c \wedge s)$**.

- Para expressarmos que uma pessoa **ou é criança, ou é adulta (ou exclusivo)** escrevemos **$(c \wedge \sim a) \vee (\sim c \wedge a)$** .

PRIORIDADE DOS CONECTIVOS

$\neg$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow$

$\leftrightarrow$

Maior Prioridade

Menor prioridade

PONTUAÇÃO

$p \rightarrow q \vee r$	significa	$p \rightarrow (q \vee r)$
$p \vee q \wedge r$	significa	$p \vee (q \wedge r)$
$p \rightarrow q \wedge \neg r \vee s$	significa	$p \rightarrow ((q \wedge (\neg r)) \vee s)$

A precedência pode ser alterada pelo uso de parênteses.

Dadas as proposições p: Maria é bonita e q: Maria é elegante, escrever na linguagem simbólica as seguintes proposições:

a) Maria é bonita e elegante.
b) Maria é bonita, mas não é elegante.
c) Não é verdade que Maria não é bonita ou elegante.
d) Maria não é bonita nem elegante.
e) Maria é bonita ou não é bonita e elegante.
f) É falso que Maria não é bonita ou que não é elegante.

RESPOSTA

a) $P \wedge Q$

b) $P \wedge \sim Q$

c) $\sim(\sim P \vee Q)$

d) $\sim P \wedge \sim Q$

e) $P \vee \sim(P \wedge Q)$

f) $\sim(\sim P \vee \sim Q)$