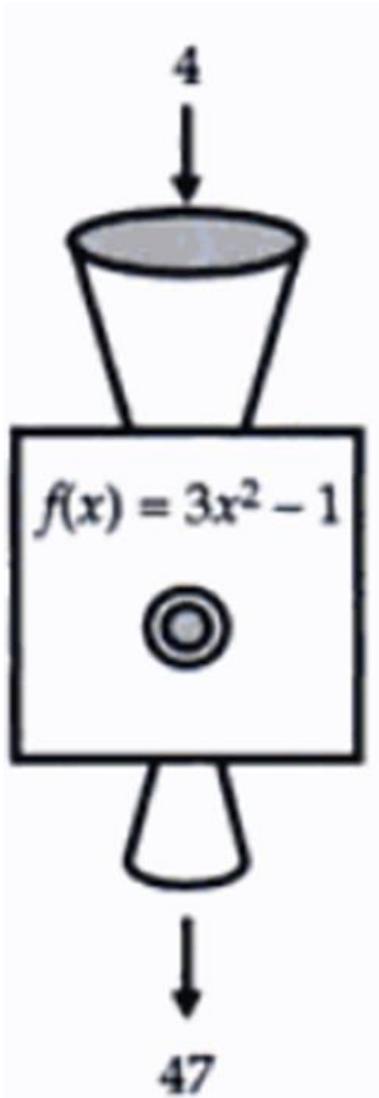


FUNÇÃO



Regra

Lei de Formação

Propriedade

Definição: Uma relação f é chamada função desde que $(a,b) \in f$ e $(a,c) \in f$ impliquem $b=c$.

A definição acima equivale a dizer que :
uma relação f não é uma função se existem a,b,c com $(a,b) \in f$ e $(a,c) \in f$ e $b \neq c$.

Exemplos:

- (a) $f = \{(1,2), (3,4), (7,5), (4,4)\}$ é função
- (b) $g = \{(1,1), (2,2), (1,3)\}$ não é função
- (c) $h = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ é função
- (d) $k = \{(0,4), (1,4), (2,4), (4,4)\}$ é função

Notação

Os matemáticos usualmente se referem a função como $f(x)=y$ em detrimento da notação $(x,y) \in f$. Esta notação em muitos casos tem vantagens quando comparada a notação de relação.

Exemplo:

$$f = \{ \dots (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), \dots \}$$

$$\text{ou } f = \{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y = x^2 \}$$

Domínio e Imagem de uma Função

Seja f uma função. ***O conjunto de todos os primeiros elementos possíveis dos pares ordenados de f é chamado de domínio de f ($Dom(f)$).*** ***O conjunto de todos os segundos elementos possíveis dos pares ordenados de f se chama imagem de f ($Im(f)$).***

Notação:

$\text{Dom}(f)=\{x: \text{existe } y, (x,y) \in f\}$ e $\text{Im}(f)=\{y: \text{existe } x, (x,y) \in f\}$

Exemplos

1. $f=\{(1,2), (3,4), (5,4), (2,3)\}$

$\text{Dom}(f)=\{1,3,5,2\}$, $\text{Im}(f)=\{2,3,4\}$

2. $g=\{(x,y) \in \mathfrak{R}^2 : y=x^2\}$

$\text{Dom}(g)=\mathfrak{R}$, $\text{Im}(g)=\mathfrak{R}^+ = \{y \in \mathfrak{R} : y \geq 0\}$

Obs.:

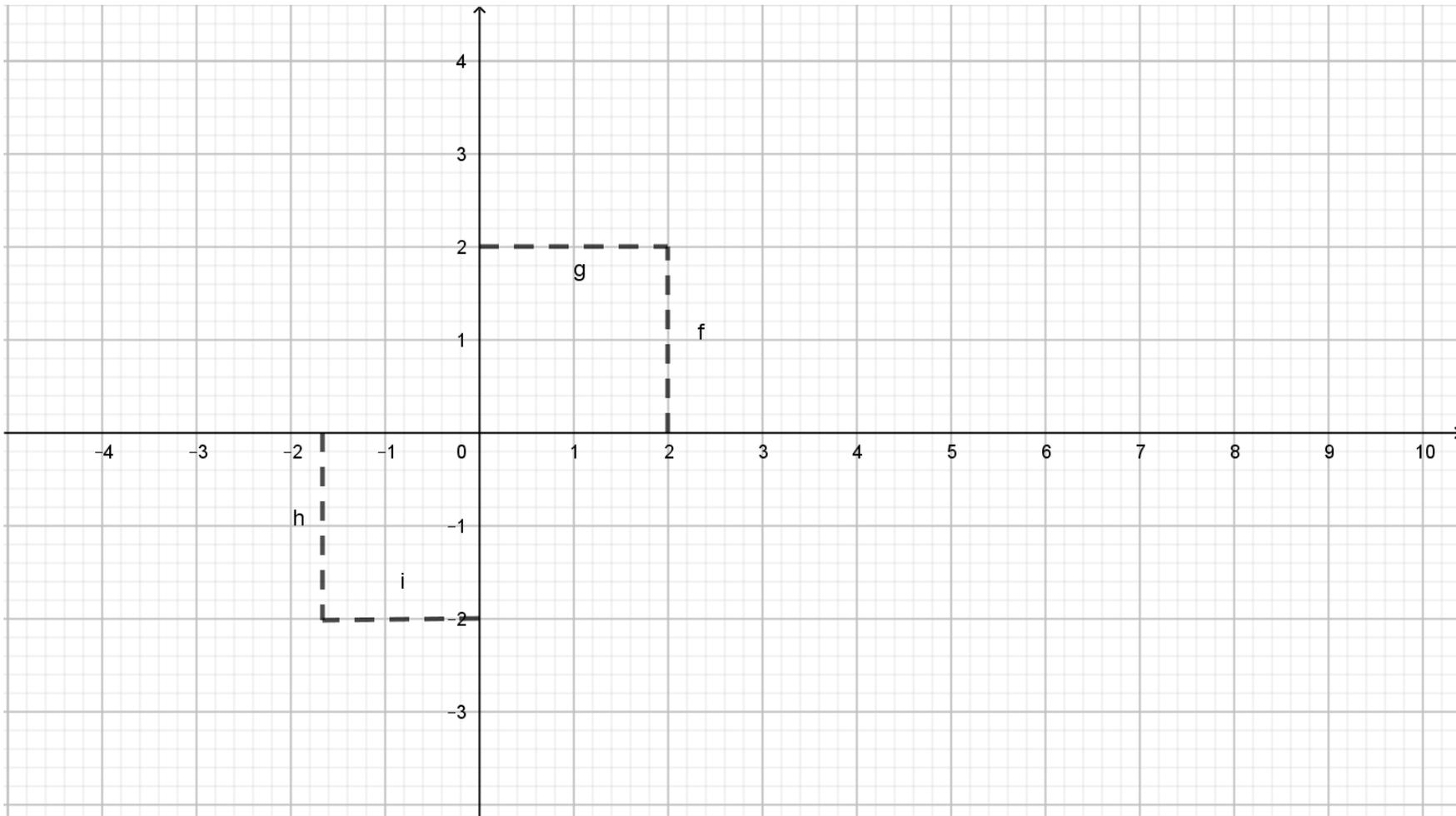
A notação $f:A \rightarrow B$ significa que “f é uma função de A para B”, ie, $\text{Dom}(f)=A$ e $\text{Im}(f) \subseteq B$.

Gráficos de funções

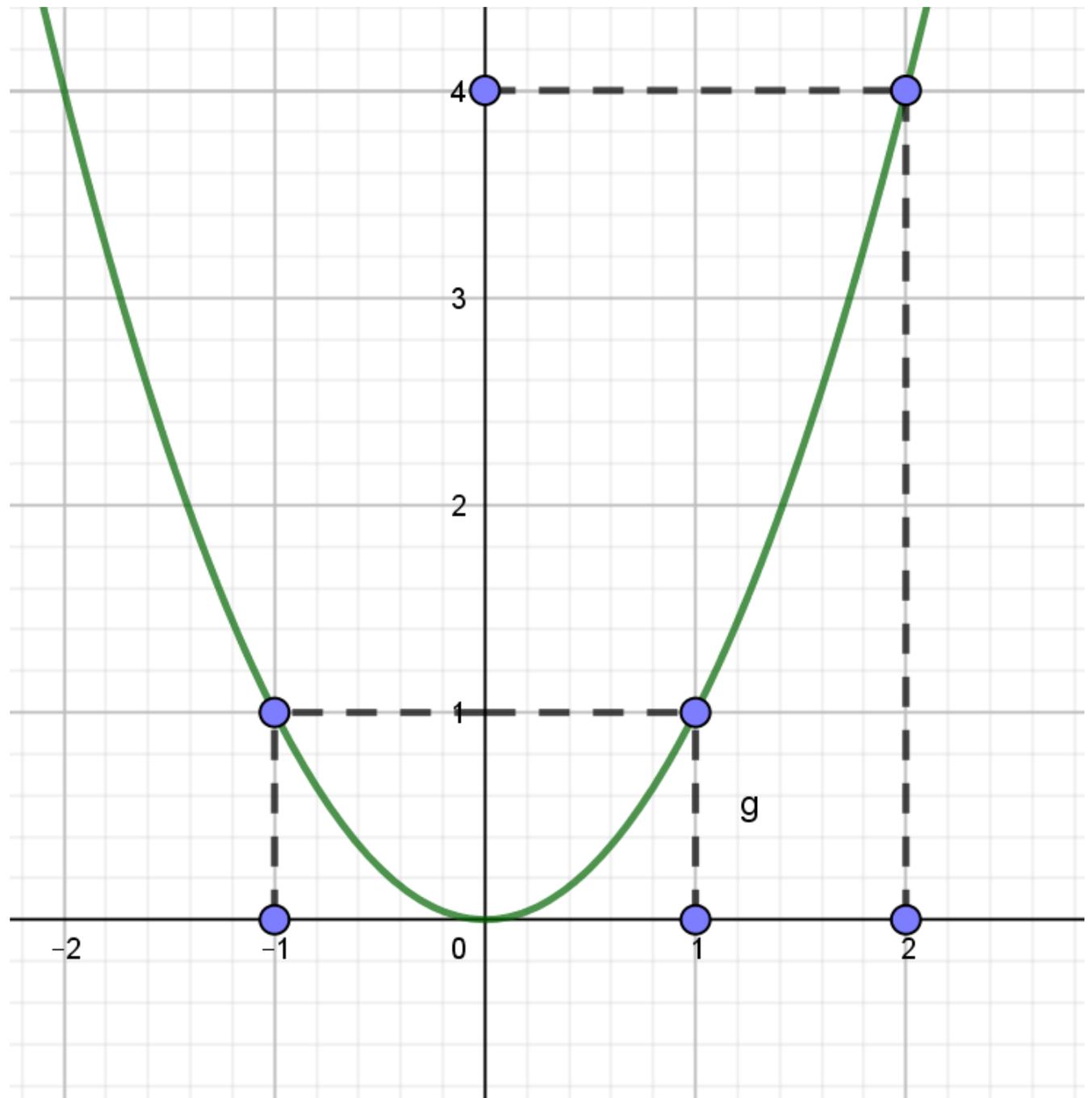
Seja a função $f:A \rightarrow B$ então o gráfico de f é representado no plano cartesiano.

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 : f(x) = y\}$$

PLANO CARTESIANO

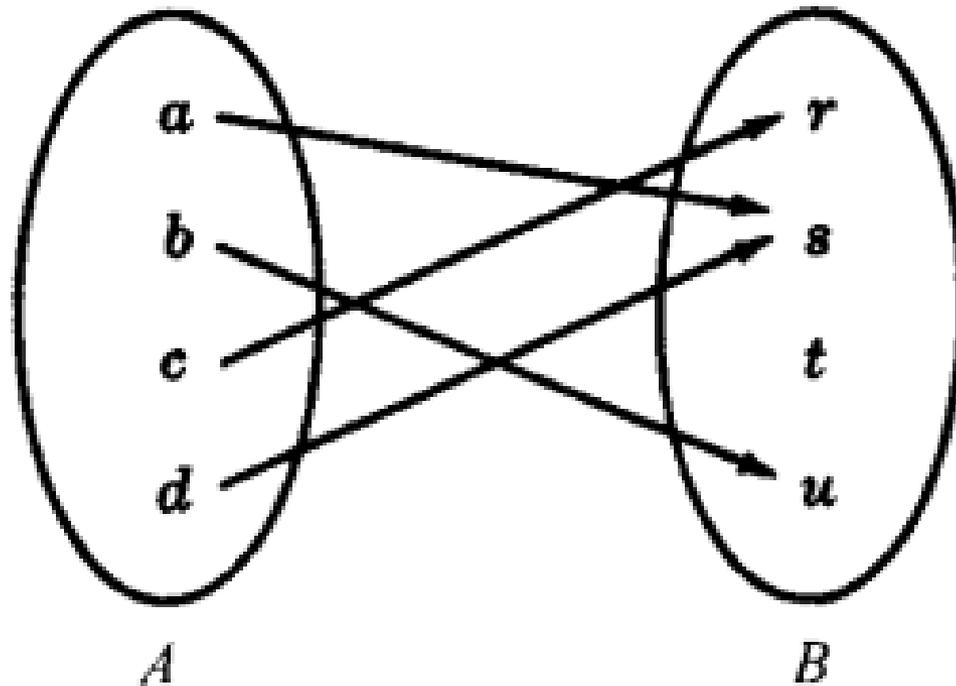


$$f(x) = x^2$$



Exemplos

$$f : A \rightarrow B$$



$$f(a) = s, \quad f(b) = u, \quad f(c) = r, \quad f(d) = s$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

função polinomial

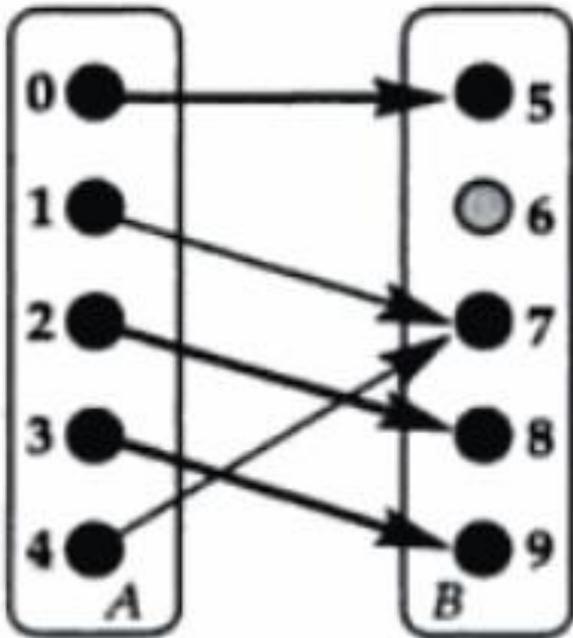
com a_0, a_1, \dots, a_n números reais

Algumas funções polinomiais

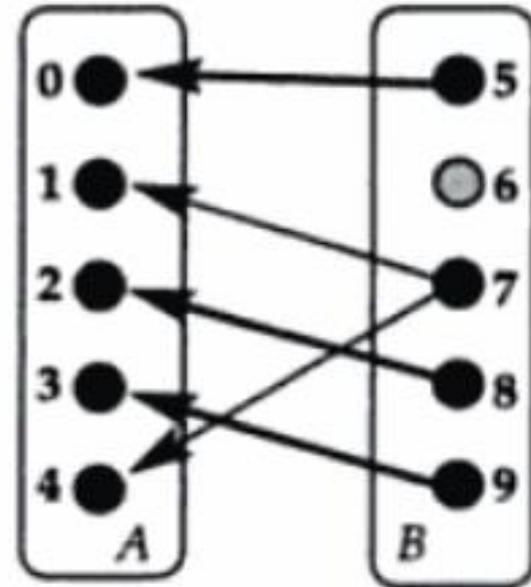
$$g(x) = x^3 + 2x + 4, \quad h(y) = 2y^7 + 3y^5 - y + 1$$

$$f(x) = 3x - 2$$

Lembre que dada uma relação R obtemos a sua inversa, por exemplo:



relação R



R^{-1}

PERGUNTA:

Se f é uma função de A em B então f^{-1} será uma função de B em A ?

Vejam os. Seja $A=\{1,2,3,4,5\}$ e $B=\{2,3,4,5\}$ tal que:

$$f=\{(1,2), (3,4), (5,4), (2,3), (4,5)\}$$

então

$$f^{-1} = \{(2,1), (4,3), (4,5), (3,2), (5,4)\}$$

não é função

Função Injetora

- Uma função f é dita *um a um* ou *injetora* se dados $a, b \in \text{Dom}(f)$ com $a \neq b$ então $f(a) \neq f(b)$.
- Equivalentemente, uma função f é dita *um a um* ou *injetora* se $f(a) = f(b)$ então $a = b$.

Proposição 1: Seja f uma função.
A relação inversa f^{-1} é uma função se, e
somente se, f é injetora.

Proposição 2: Sejam f e f^{-1} funções.
Então $\text{Dom}(f) = \text{Im}(f^{-1})$ e $\text{Im}(f) = \text{Dom}(f^{-1})$.

Função Sobrejetora

Uma função $f:A\rightarrow B$ é dita *sobrejetora* se para todo $y\in B$ existe $x\in A$ tal que $f(x)=y$. Em outras palavras $\text{Im}(f)=B$.

Exemplos: $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{2,3,4\}$.

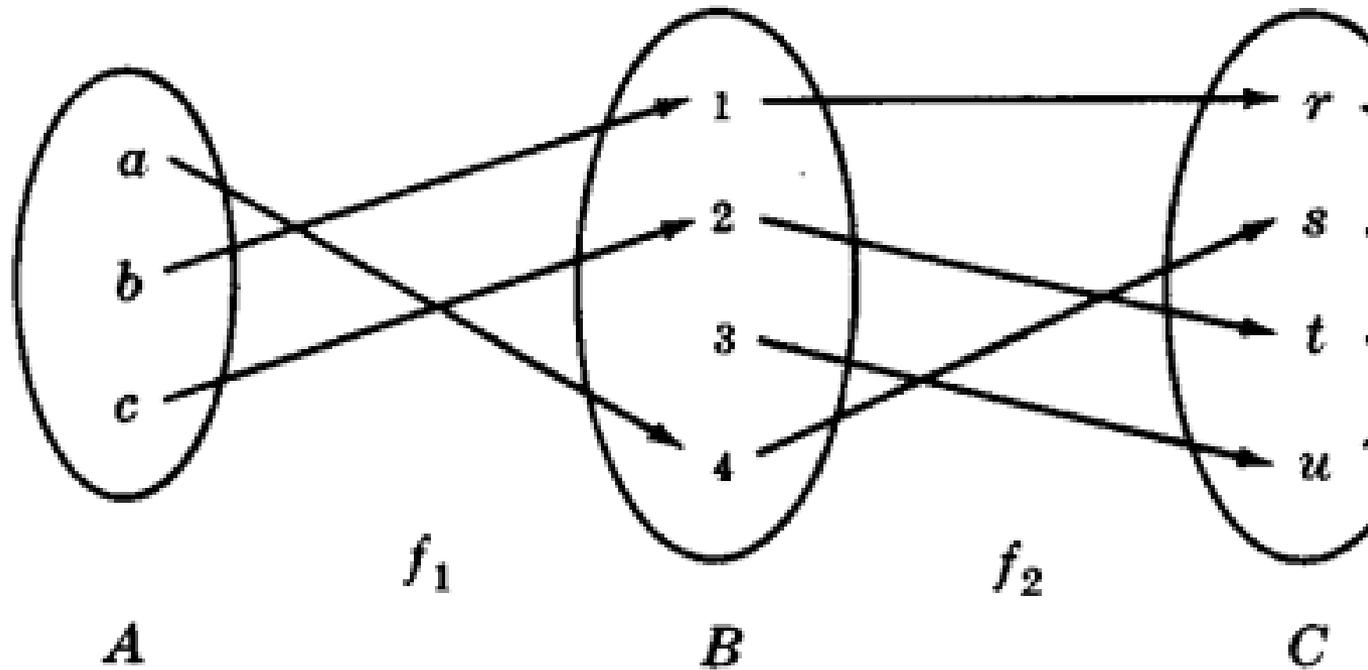
1. $f=\{(1,2),(3,4),(2,3)\}$ é sobrejetora.

1. $f=\{(1,2),(3,4),(2,4)\}$ não é sobrejetora pois $3 \notin \text{Im}(f)$.

Obs.: Quando uma função é ***injetora*** e ***sobrejetora*** dizemos que esta função é ***bijetora***.

Seja a função $f:A\rightarrow B$ bijetora e A, B conjuntos finitos. Então o número de elementos de A é igual ao número de elementos de B (Notação: $n(A)=n(B)$).

$$f_1: A \rightarrow B, f_2: B \rightarrow C$$

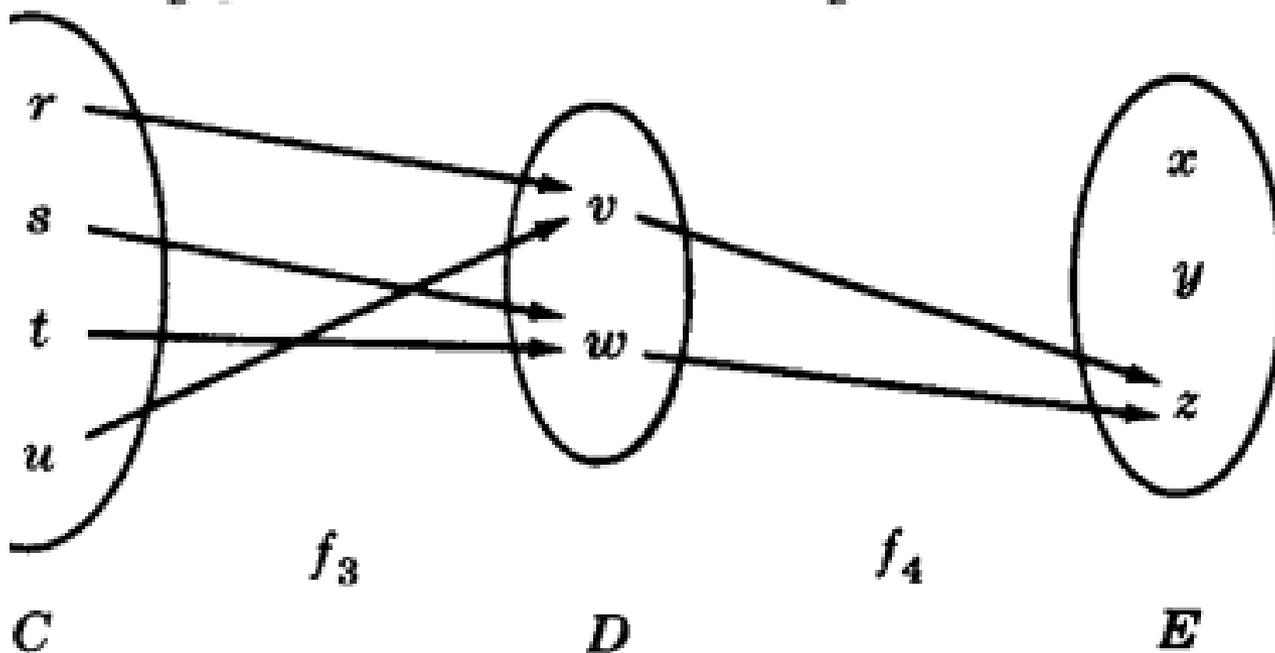


f_1 e f_2 são funções injetoras

f_1 não é sobrejetora, pois, $3 \notin \text{Im}(f_1)$

f_2 é bijetora

$f_3: C \rightarrow D$ and $f_4: D \rightarrow E$



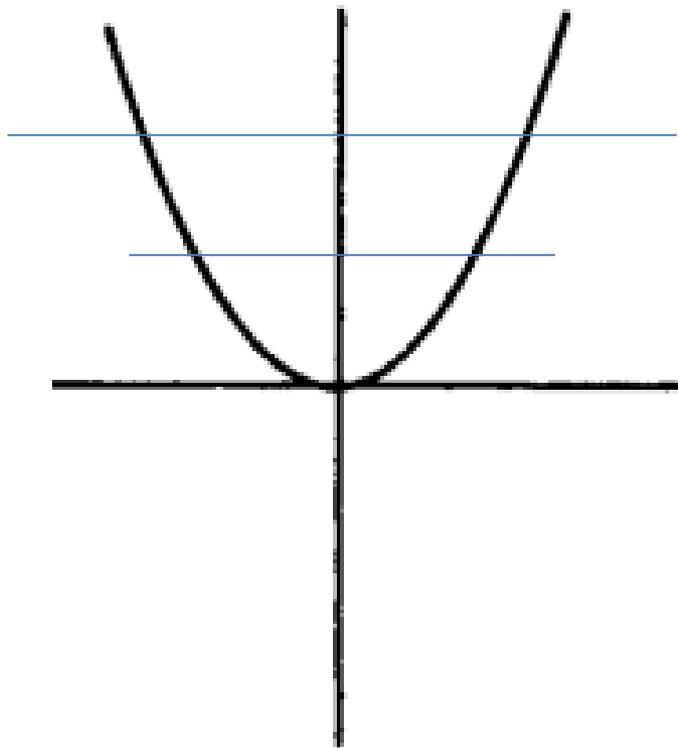
f_3 não é função injetora, pois, $f_3(s)=f_3(t)$

f_3 é sobrejetora

f_4 não é função injetora, pois, $f_4(v)=f_4(w)$

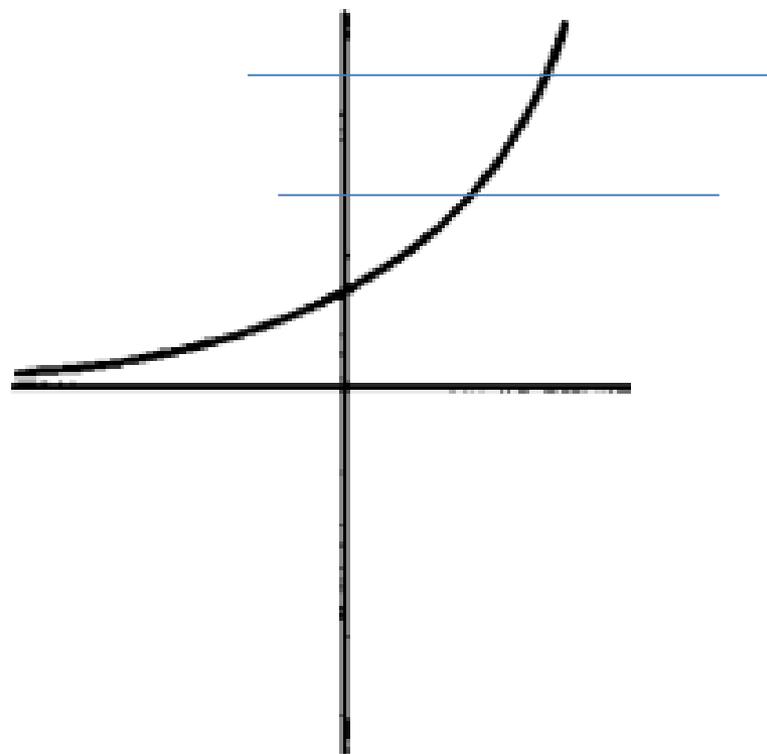
f_4 não é função sobrejetora, pois, $x \notin \text{Im}(f_4)$

Reconhecendo funções injetoras graficamente



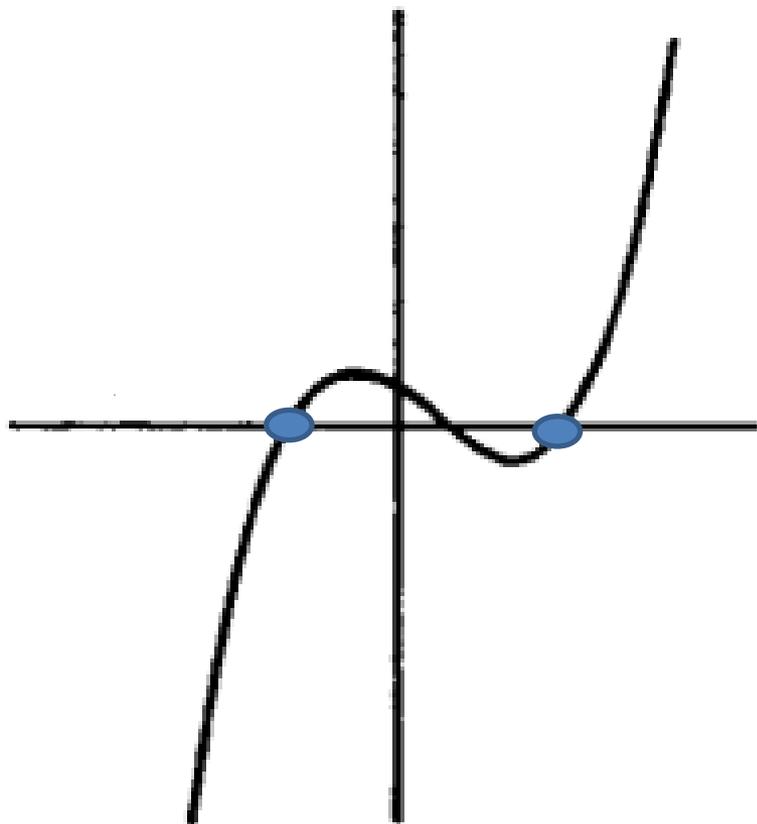
$$f_1(x) = x^2$$

f_1 não é injetora



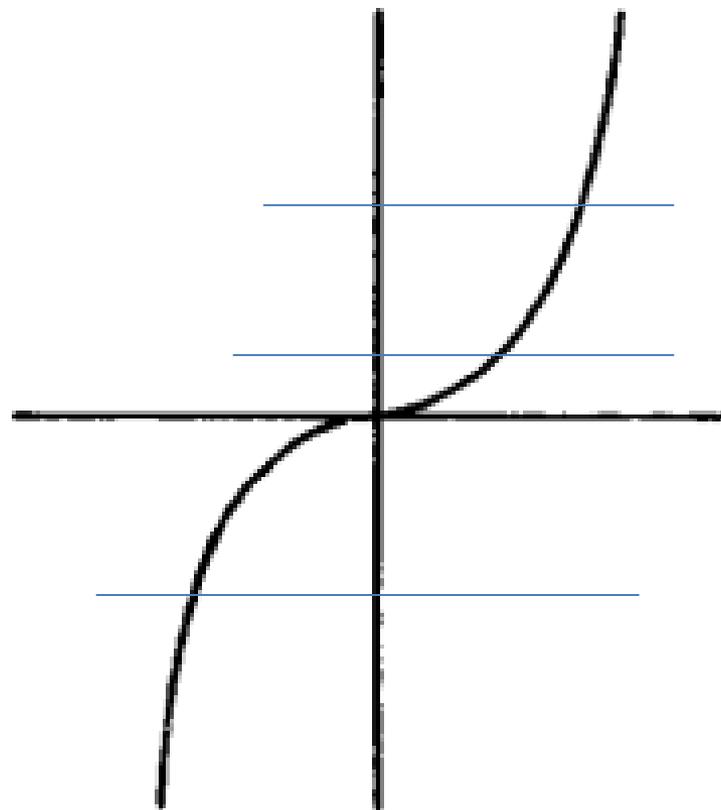
$$f_2(x) = 2^x$$

f_2 é injetora



$$f_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

f_3 não é injetora



$$f_4(x) = x^3$$

f_4 é injetora

Composição de Funções

Sejam as funções $f:A \rightarrow B$ e $g:B \rightarrow C$ tal que $\text{Im}(f)=\text{Dom}(g)$. Definimos a nova função $g \circ f$ (composição de f e g) como:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Exemplo: Dados $A=\{a,b,c\}$, $B=\{x,y,z\}$, $C=\{r,s,t\}$ e $f:A \rightarrow B$ e $g:B \rightarrow C$ definidas por $f=\{(a,y),(b,x),(c,y)\}$ e $g=\{(x,s),(y,t),(z,r)\}$.
Encontre $g \circ f$, $\text{Im}(f)$, $\text{Im}(g)$ e $\text{Im}(g \circ f)$.

SOLUÇÃO

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = t$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(x) = s$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = t$$

$$g \circ f = \{(a, t), (b, s), (c, t)\}.$$

$$\text{Im}(f) = \{x, y\}, \quad \text{Im}(g) = \{r, s, t\}, \quad \text{Im}(g \circ f) = \{s, t\}$$

Corrigir: no lugar de f
é g

Funções matemáticas

INT: $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{Z}$ tal que INT(x) converte x em um número inteiro deletando sua parte fracionária.

$$\text{INT}(3.5)=3, \text{INT}(\sqrt{5}) = 2, \text{INT}(-8.5)=-8.$$

$$| \cdot | : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad |-3| = 3, \quad |6| = 6, \quad |-4| = 4.$$

$\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro que não excede x

$\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro que não é menor que x

Exemplos:

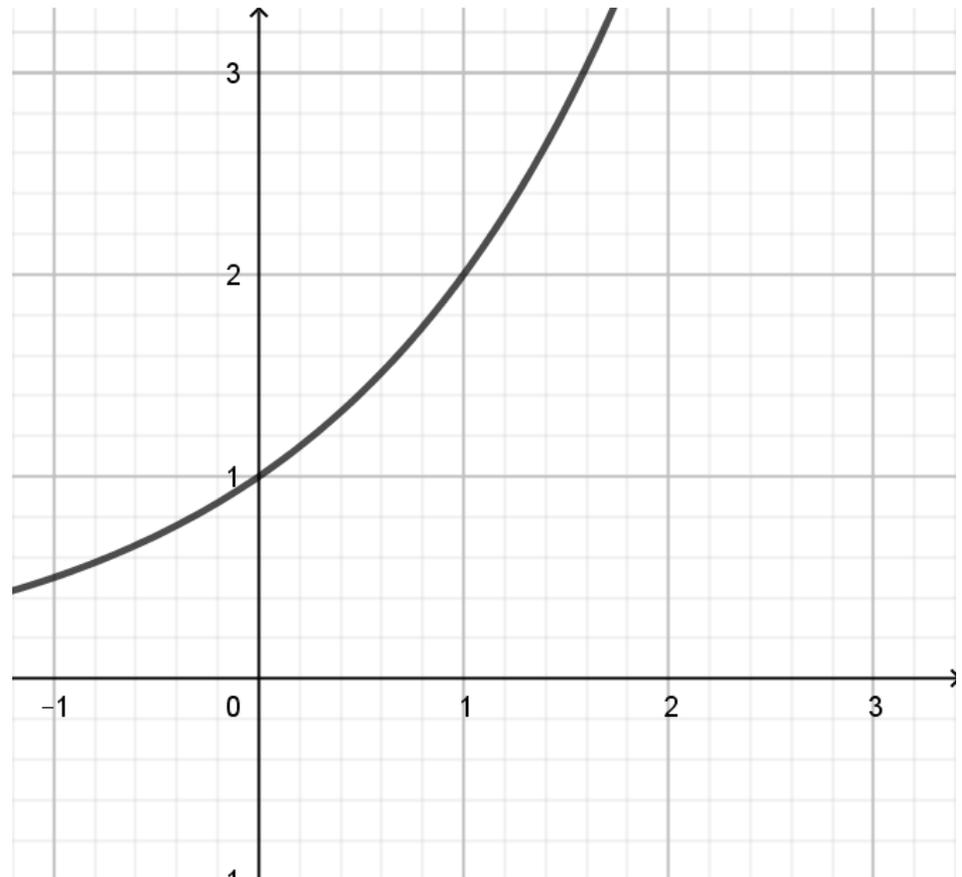
$$\lfloor 32 \rfloor = 32 \quad \lfloor -3 \rfloor = -3 \quad \lfloor -2.5 \rfloor = -3 \quad \lfloor -9.5 \rfloor = -10$$

$$\lceil 32 \rceil = 32 \quad \lceil -3 \rceil = -3 \quad \lceil -2.5 \rceil = -2 \quad \lceil -9.5 \rceil = -9$$

Função exponencial: $f(x)=a^x$

Lembre: $a^m = a \cdot a \cdot a \dots \cdot a$ (m vezes), $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, $a^x = \lim_{r \rightarrow x} a^r$, r número racional.



$$f(x)=2^x$$

Função Logarítmica

Seja b um número inteiro positivo. O logaritmo de qualquer número positivo x na base b é denotado

$$\log_b x$$

Assim,

$$\log_b x = y \quad \text{see} \quad b^y = x.$$

Exemplos:

$$\begin{array}{l} \log_2 8 = 3 \\ \log_2 64 = 6 \end{array} \quad \text{see} \quad \begin{array}{l} 2^3 = 8; \\ 2^6 = 64 \end{array}$$

$$\log_{10} 100 = 2$$

$$\log_{10} 0.001 = -3$$

see

$$10^2 = 100$$

$$10^{-3} = 0.001$$

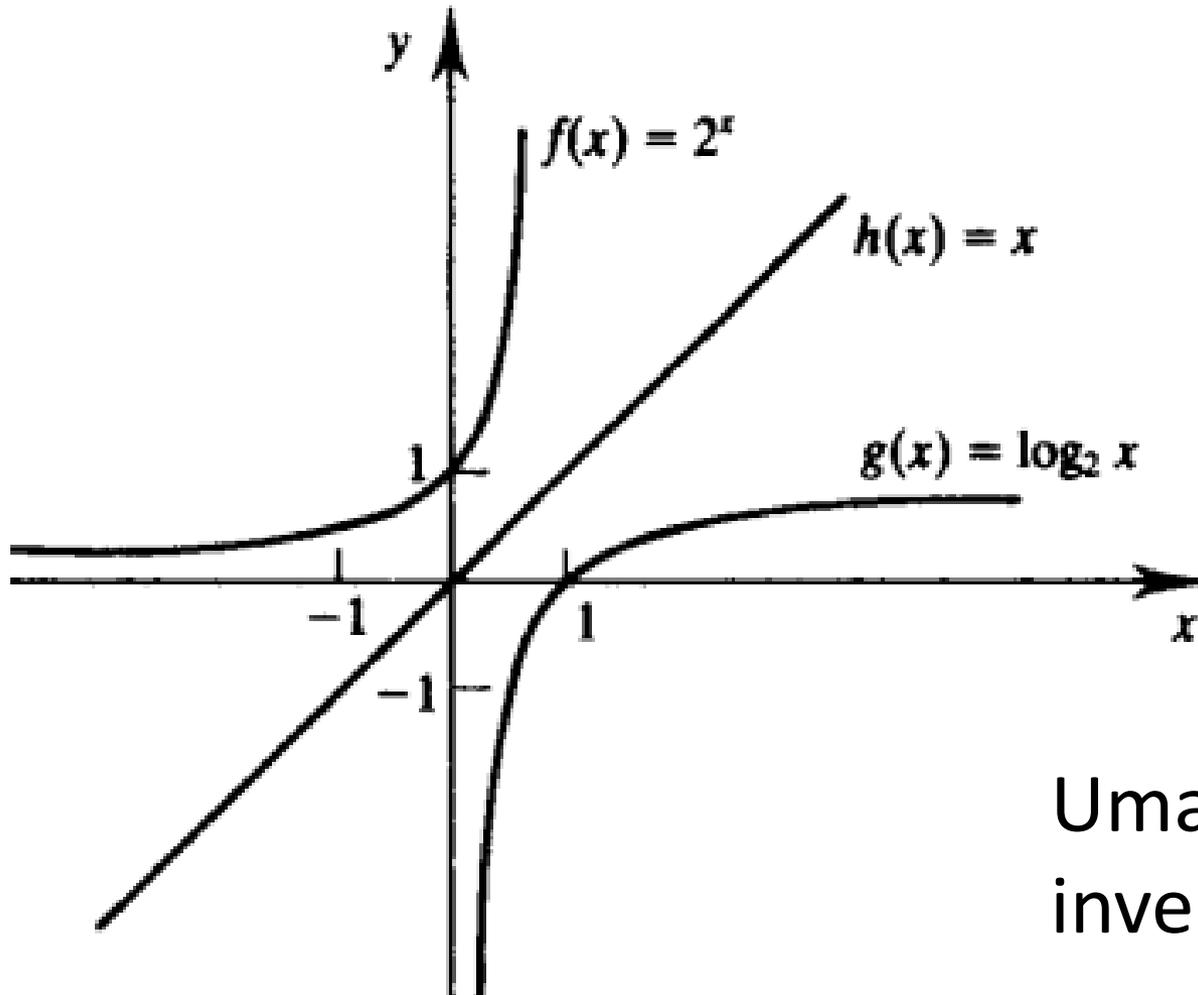
$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

OBS.:

O logaritmo de um número negativo e o logaritmo de zero não estão definidos.

Relação entre as funções exponencial e logarítmica



Uma função é
inversa da outra

Princípio da Casa de Pombo: Seja a função $f:A \rightarrow B$ com A e B conjuntos finitos.

(a) Se $n(A) > n(B)$ então f não é injetora.

(b) SE $n(A) < n(B)$ então f não é sobrejetora.