Objetivos

Caracterizar o que é a lógica e do que ela se ocupa.

Reconhecer e trabalhar com os símbolos formais que são usados na lógica proposicional e de predicados.

Saber representar sentenças da língua portuguesa através do Cálculo Proposicional Clássico (CPC) e de Predicados.

Utilizar o CPC e o Cálculo de Predicados para analisar a validade de argumentos.

A **lógica**, ciência do raciocínio dedutivo, estuda a ***relação de conseqüência***, tratando entre outras coisas das ***inferências válidas***, ou seja, das inferências cujas **conclusões têm que ser verdadeiras quando as premissas o são**.

O objetivo da lógica consiste, então, na menção e estudo dos ***princípios lógicos*** usados no ***raciocínio dedutivo***.

A lógica clássica adota como regras fundamentais do pensamento os dois seguintes princípios (ou axiomas):

Princípio da Não Contradição

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Princípio do Terceiro Excluído

Toda proposição ou é verdadeira ou falsa.

Linguagens formais _ Características

Regras de formação são precisamente definidas e as quais podemos atribuir um único sentido, ***sem ambiguidades***.

Podem ter diversos níveis de expressividade. Em geral, **quanto maior a expressividade, maior também a complexidade** de se manipular essas linguagens.

Iniciaremos nosso estudo da lógica a partir de uma ***linguagem proposicional***, que tem uma expressividade limitada, mas já nos permite expressar uma série de relações lógicas interessantes.

Nas linguagens naturais (língua portuguesa) as sentenças podem ser classificadas de diversas formas:

- Interrogativas: Que horas são?
- Imperativas: Lave as roupas agora!
- Declarativas: Joana é uma pessoa legal.
- Exclamativas: Que belo jardim é o desta praça!

Na lógica restringimo-nos a uma classe de proposições, ***as DECLARATIVAS***, ao qual podemos atribuir **um valor de verdade** (verdadeiro ou falso).

Nem toda sentença pode assumir um valor de verdade.

“Esta sentença é falsa.”

Esse tipo de sentença é chamado de **auto-referente** e deve ser excluída da linguagem.

As sentenças declarativas, serão chamadas de **Proposições**.

Em geral, indicaremos as proposições com letras latinas como **P, Q, R, p, q, r, s, etc**.

Como na língua portuguesa, proposições podem ser combinadas para formar outras:

se **P e Q são proposições**, então podemos formar de

"**não P**", "**P e Q**", "**P ou Q**", "**se P, então Q**" (1)

¬, ∧ , ∨ , → são chamados conectivos lógicos

“não P” — NEGAÇÃO: ¬ , ~

“P e Q” — CONJUNÇÃO: ∧

“P ou Q” — DISJUNÇÃO: ∨

“se P, então Q” — IMPLICAÇÃO: →

G:José é torcedor do gremio.
N:João gosta de nadar.
F: Fumaça
O: Fogo

José é torcedor do grêmio e João gosta de nadar : **$G \land F$**

José é torcedor do grêmio ou João gosta de nadar : **$G \lor F$**

Se há fumaça, há fogo: **$F \rightarrow O$**

João não gosta de nadar: **~N**

Símbolos do alfabeto

1. Um conjunto não vazio At de símbolos, chamados **proposicões atômicas**, indicadas por letras como p, q, r, s,t ... .

2. Símbolos para os **conectivos lógicos** : **¬, ∧, ∨,** →

3. Parênteses à direita e à esquerda: **(,)**

Fórmulas da Lógica Proposicional

O conjunto das fórmulas da lógica proposicional, **Form(L)**, é o menor conjunto satisfazendo as regras de formação:

1.Caso básico:
Os símbolos proposicionais estão em Form(L), i.e, $At \subseteq Form(L)$.

2. Caso Indutivo 1: Se $A \in Form(L)$ então $\sim A \in Form(L)$.

3. Caso Indutivo 2: Se $A, B \in Form(L)$ então $(A \wedge B) \in Form(L)$, $(A \vee B) \in Form(L)$ e $(A \rightarrow B) \in Form(L)$.

Os símbolos proposicionais são chamados de fórmulas atômicas ou átomos.

Se p, q, r são símbolos proposicionais, então:

$\sim p$, $\sim\sim r$, $(p \vee q)$, $((r \wedge p) \rightarrow q)$, $((r \rightarrow p) \wedge q)$

são fórmulas da linguagem proposicional.

Os parênteses mais externos de uma fórmula podem ser omitidos. Podemos escrever , $p \wedge q$ no lugar de $(p \wedge q)$, $(r \wedge p) \rightarrow q$ lugar de $((r \wedge p) \rightarrow q)$.

Expressando idéias com o uso de fórmulas

Símbolos: c (criança), a (adulto), i (idoso), e (estudante) e s (aposentado). Temos:

- Para expressar a proibição de que **não podemos ter uma criança aposentada**, podemos escrever $\sim(c \wedge s)$.

- Para expressarmos que uma pessoa **ou é criança, ou é adulta (ou exclusivo)** escrevemos $(c \wedge \sim a) \vee (\sim c \wedge a)$.

Dadas as proposições **p:Maria é bonita**, **q: Maria é elegante**, represente as seguintes proposições como fórmulas.

a. Maria é bonita e elegante.
b. Maria é bonita, mas não é elegante.
c. Não é verdade que Maria não é bonita ou elegante.
d. Maria não é bonita nem elegante.
e. Maria é bonita ou não é bonita e elegante.

Respostas:

a. $P \wedge Q$ b. $P \wedge \sim Q$ c. $\sim(\sim P \vee Q)$ d. $\sim P \wedge \sim Q$ e. $P \vee \sim(P \wedge Q)$

PRIORIDADE DOS CONECTIVOS

$\neg$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow$

$\leftrightarrow$

Maior Prioridade

Menor prioridade

PONTUAÇÃO

$p \rightarrow q \vee r$	significa	$p \rightarrow (q \vee r)$
$p \vee q \wedge r$	significa	$p \vee (q \wedge r)$
$p \rightarrow q \wedge \neg r \vee s$	significa	$p \rightarrow ((q \wedge (\neg r)) \vee s)$

A precedência pode ser alterada pelo uso de parênteses.

CONECTIVOS LÓGICOS

<u>**Interpretação da negação**</u>

S: Socrates é mortal, então ~S: Socrates é imortal.

J: João é bom jogador, então ~~~J: João é mau jogador.~~

Cuidado!!! João pode ser um jogador mediano.

~J: Não é verdade que João é bom jogador.

Negação

~p é verdadeiro se, e somente se p é falso

~p é falso se, e somente se p é verdadeira

TABELA VERDADE

A	~A
V	F
F	V

Interpretação da conjunção

"*Isabela se casou* ***e*** *teve um filho*" é bem diferente de "*Isabela teve um filho* ***e*** *casou-se*". (Temporalidade!!!!)

"***Isabela é casada e tem filhos***" é equivalente a "***Isabela tem filhos e é casada***". ***Esta sentença é formalizável no CPC por meio de uma conjunção.***

CONJUNÇÃO

Uma conjunção $p \wedge q$ é verdadeira se, e somente se p e q são verdadeiras.

TABELA VERDADE

p	**q**	**$p \wedge q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

PARA PENSAR!

Considere a sentença: **João pulou do edifício e morreu .**

Nesta sentença estamos afirmando duas proposições:

João pulou do edifício e **João morreu**.

OBS.: Se J: João pulou do edificio e M: João morreu. Em linguagem proposicional não há distinção entre J$\wedge$M e M$\wedge$J. É claro que *não faz sentido a proposição "João morreu e pulou do edifício".*

A conjunção, como definida pela tabela verdade, é interpretada como a conjunção (ou as conjunções) que temos em uma linguagem natural como o português, agora, sem nuances de temporalidade.

Algo similar ocorre com **“mas”** que também é formalizado usando-se $\wedge$.

Exemplo: Pedro é inteligente e preguiçoso.

Pedro é inteligente, mas preguiçoso.

Interpretação da disjunção

P: “*Marcos estuda filosofia*“
Q: “*Marcos estuda matemática*“

P∨Q: “*Mauro estuda filosofia ou matemática*“

Cuidado:
"*Nestas férias eu vou viajar ou ficar em casa*“ (ou exclusivo).

DISJUNÇÃO

Uma disjunção $p \vee q$ *é falsa se, e somente se p e q são falsas.*

A disjunção tem sentido inclusivo de e/ou.

TABELA VERDADE

p	**q**	$\mathbf{p \vee q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Interpretação da implicação (P→Q)

"*Se A então B* " , "A *implica B*"

" B é condição necessária de A " .
" A é condição suficiente de B ".
" B é consequencia de A ".
" A somente se B ".

A é a sentença antecedente e B é a sentença consequente.

PARA PENSAR!

“Se 2+2=5 então a lua é feita de queijo” é uma implicação verdadeira.

Vejamos:

(i) Se o Califa Omar não queimou a biblioteca de Alexandria , então alguma outra pessoa o fez.

(ii) Se o Califa Omar não tivesse queimado a biblioteca de Alexandria , então alguma outra pessoa o teria feito.

IMPLICAÇÃO (CONDICIONAL)

Uma implicação $p \rightarrow q$ é falsa se, e somente se p é verdadeira e q é falsa.

TABELA VERDADE

p	**q**	**$p \rightarrow q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Para entender (aceitar) melhor a implicação pense nela como uma maneira mais simples de dizer:

$$\sim (P \wedge \sim Q)$$

É O QUE DIZ A TABELA DA IMPLICAÇÃO:

$P \rightarrow Q$ não é verdadeiro quando P é verdadeiro e Q é falso.

Interpretação da bi-implicação (P↔Q)

P: "*O número natural é divisível por cinco*"
Q: "O último algarismo do número natural é zero ou cinco".

P↔Q :

"O número natural é divisível por 5 se, e somente se, o seu último algarismo é zero ou cinco".

BICONDICIONAL

Uma bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira se, e somente se p e q possuem o mesmo valor de verdade.

TABELA VERDADE

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

OU EXCLUSIVO

Uma disjunção exclusiva $p \veebar q$ é verdadeira se, e somente se p e q possuem diferentes valores de verdade.

O sentido da disjunção exclusiva representa a “idéia” de <u>ou uma coisa ou outra</u>.
Ex.: João será eleito prefeito de Florianópolis ou José será eleito.

TABELA VERDADE

p	**q**	**$p \veebar q$**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Transcreva as sentenças abaixo sendo C: Cleo; m: Miau; t: Tweety; F: x é um peixe; P: x é um pássaro; G: x é um gato; M: x é maior do que y; L: x gosta mais de y do que de z

(a) Cleo não é um pássaro.
(b) Miau não é um peixe.
(c) Miau é um gato ou é um pássaro.
(d) Miau é um gato e é maior que Cleo.
(e) Tweety não é um gato.
(f) Ou Tweety é maior que Miau, ou Miau é maior que Tweety.
(g) Se Miau é maior que Tweety, então Tweety não é maior que Miau.
(h) Miau é maior que Tweety, se Tweety não é maior que Miau.
(i) Se Miau é um gato, então não é um peixe.
(j) Miau gosta mais de Cleo do que de Tweety se e somente se Tweety é um pássaro.
(k) Tweety gosta mais de Miau do que de Cleo, mas Miau não gosta mais de Cleo do que Tweety.
(l) Nem Miau nem Cleo são pássaros.
(m) Tweety não é um gato ou não é um peixe.
(n) Não é verdade que Tweety é um gato e um peixe.
(o) Não é o caso que, se Miau é um gato, então é um peixe.

Exercício 6.6 Formalize as sentenças abaixo, usando a notação sugerida:

(a) Carla é pintora, mas Paulo é jogador de futebol. (c: Carla; p: Paulo; P: x é pintora; J: x é jogador de futebol)

(b) Ou Paulo é um engenheiro, ou Carla o é. (E: x é engenheiro)

(c) Carla é pintora, mas Paulo é engenheiro ou jogador de futebol.

(d) Se Sócrates é o mestre de Platão, então Platão é um filósofo. (s: Sócrates; p: Platão; M: x é o mestre de y; F: x é um filósofo)

(e) Paulo ama Denise, que ama Ricardo. (d: Denise; r: Ricardo; A: x ama y)

(f) Paulo ama a si próprio se e somente se ele é narcisista. (A: x ama y; N: x é narcisista)

(g) Chove ou faz sol. (C: chove; S: faz sol)

(h) Não chove, mas nem faz sol nem está frio. (F: está frio)

(i) João vai à praia, se o tempo estiver bom. (j: João; P: x vai à praia; T: o tempo está bom)

(j) Se o tempo estiver bom, e não fizer muito frio, João irá à praia. (F: faz muito frio)

(k) Se o tempo não estiver bom, então, se fizer muito frio, João não irá à praia.

(l) A Terra é um planeta, e a Lua gira em torno da Terra. (t: a Terra; l: a Lua; P: x é um planeta; G: x gira em torno de y)

(m) Saturno é um planeta, mas não gira em torno de Alfa Centauri. (s: Saturno; a: Alfa Centauri)

(n) A Lua não é um planeta, nem gira em torno de Saturno.

(o) Miau é um gato preto. (m: Miau; G: x é um gato; P: x é preto)

(p) Miau é um gato angorá que não é preto. (A: x é angorá)

(q) Carla é mais alta que Paulo somente se Paulo é mais baixo que Carla. (A: x é mais alto que y; B: x é mais baixo que y)

(r) Carla não é mais alta que Paulo somente se for mais baixa ou tiver a mesma altura que ele. (T: x tem a mesma altura que y)