INTRODUÇÃO: PRINCÍPIOS BÁSICOS DE CONTAGEM

Princípio da regra da soma: Suponha que algum evento E pode ocorrer de m maneiras e que um segundo evento F pode ocorrer de n maneiras, e suponha que ambos os eventos não podem ocorrer simultaneamente. Então, E ou F podem ocorrer de $m + n$ maneiras. Mais genericamente, suponha que um evento E_1 pode ocorrer de n_1 maneiras, um segundo evento E_2 pode ocorrer de n_2 maneiras, e que um terceiro evento E_3 pode ocorrer de n_3 maneiras, ..., e suponha que dois eventos não podem ocorrer ao mesmo tempo. Então, algum dos eventos pode ocorrer de $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$, maneiras.

Princípio da regra do produto: Suponha que existe um evento E que pode ocorrer de m maneiras e, independentemente deste evento, que existe um segundo evento F que pode ocorrer de n maneiras. As combinações de E e F ocorrem de mn maneiras. Mais genericamente, suponha que um evento E_1 pode ocorrer de n_1 maneiras, e, seguindo E_1, um segundo evento E_2 pode ocorrer de n_2 maneiras, e, seguindo E_2, um terceiro evento E_3 pode ocorrer de n_3 maneiras, e assim por diante. Então, todos os eventos podem ocorrer, na ordem indicada, de $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots$ maneiras.

(1) **Princípio da regra da soma:** se A e B são conjuntos disjuntos, então:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

(2) **Princípio da regra do produto:** seja $A \times B$ o produto cartesiano dos conjuntos A e B. Então:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

NOTAÇÃO FATORIAL

O produto dos inteiros positivos de 1 até n, inclusive, é denotado por $n!$ (lê-se "n fatorial"):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-2)(n-1)n$$

Em outras palavras, $n!$ é definido por:

$$1! = 1 \qquad \text{e} \qquad n! = n \cdot (n-1)!$$

Também é conveniente definir $0! = 1$.

PERMUTAÇÕES

Qualquer arranjo de um conjunto de n objetos numa ordem dada é dito uma *permutação* dos objetos (usando todos a cada vez). Qualquer arranjo de $r \leq n$ desses objetos em uma ordem dada é dito uma *r-permutação* ou uma *permutação de n objetos* (tomando r a cada vez.). Considere, por exemplo, o conjunto de letras a, b, c e d. Então:

(i) *bdca*, *dcba* e *acdb* são permutações das quatro letras tomando todas a cada vez.

(ii) *bad*, *adb*, *cbd* e *bca* são permutações das quatro letras tomando três a cada vez.

(iii) *ad*, *cb*, *da* e *bd* são permutações das quatro letras tomadas duas a cada vez.

O número de permutações de n objetos, tomando r a cada vez, é denotado por

$$P(n, r),\ {}_nP_r,\ P_{n,r},\ P_r^n \text{ ou } (n)_r$$

Usaremos $P(n, r)$. Antes de deduzirmos a fórmula geral para $P(n, r)$, consideramos um caso particular.

Teorema 6-2: $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

No caso especial em que $r = n$, temos

$$P(n,n) = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Corolário 6-3: existem $n!$ permutações de n objetos (tomando todos a cada vez).

Por exemplo, existem $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ permutações das três letras a, b e c. São elas, abc, acb, bac, bca e cab, cba.

Teorema 6-4: $P(n; n_1, n_2, \ldots, n_r) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$.

Demonstramos o teorema acima com um exemplo particular. Suponha que queiramos formar todas as possíveis "palavras" de cinco letras usando as letras da palavra "BABBY". Existem $5! = 120$ permutações dos objetos B_1, A, B_2, B_3, Y, onde os três Bs são distintos. Observe que as seis permutações seguintes

$$B_1B_2B_3AY, \quad B_2B_1B_3AY, \quad B_3B_1B_2AY, \quad B_1B_3B_2AY, \quad B_2B_3B_1AY, \quad B_3B_2B_1AY,$$

produzem a mesma palavra quando os índices são removidos. O 6 vem do fato de que existem $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras diferentes de posicionar os três Bs nas três primeiras posições da permutação. Isto é verdade para cada conjunto de três posições nas quais os Bs podem aparecer. Conseqüentemente, existem

$$P(5; 3) = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

COMBINAÇÕES

Suponha que tenhamos um conjunto de n objetos. Uma *combinação* desses n objetos à taxa r é uma seleção de r objetos cuja ordem não importa. Em outras palavras, uma r-combinação de um conjunto de n objetos é qualquer subconjunto de r elementos. Por exemplo, as combinações das letras a, b, c e d à taxa três são:

$$\{a, b, c\}, \quad \{a, b, d\}, \quad \{a, c, d\}, \quad \{b, c, d\} \qquad \text{ou simplesmente} \qquad abc,\ abd,\ acd,\ bcd$$

Observe que as seguintes combinações são iguais:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab \ \text{ e } \ cba$$

Isto é, cada uma delas denota o mesmo conjunto $\{a, b, c\}$.

Exemplo 6.7 Ache o número de combinações de quatro objetos *a*, *b*, *c* e *d* à taxa 3.

Combinação	Permutações
abc	*abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*
abd	*abd*, *adb*, *bad*, *bda*, *dab*, *dba*
acd	*acd*, *adc*, *cad*, *cda*, *dac*, *dca*
bcd	*bcd*, *bdc*, *cbd*, *cdb*, *dbc*, *dcb*

Teorema 6-5: $C(n,r) = \dfrac{P(n,r)}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

(a) Quantos comitês de três podem ser formados com oito pessoas?

(*b*) Um fazendeiro compra três vacas, dois porcos e quatro galinhas de um homem que tem seis vacas, cinco porcos e oito galinhas. Quantas escolhas tem o fazendeiro?

$$\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=20\cdot 10\cdot 70=14.000 \text{ maneiras.}$$