DEFINIÇÃO ALGÉBRICA

PRELIMINARES

a) O produto vetorial é um *vetor*

b) $$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

c_1) a permutação de duas linhas inverte o sinal do determinante

c_2) se duas linhas forem constituídas de elementos proporcionais o determinante é zero

c_3) se uma das linhas for constituída de zeros o determinante é zero

Um determinante de ordem 3 pode ser dado por

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Teorema de Laplace aplicado à primeira linha

Por exemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

DEFINIÇÃO DO PRODUTO VETORIAL

produto vetorial de dois vetores

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$

também é indicado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e lê-se "$\vec{u}$ vetorial $\vec{v}$".

vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

O símbolo à direita de **(2)** não é um determinante

usaremos essa notação pela facilidade

Calcular $\vec{u} \times \vec{v}$ para $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (4 - 0)\vec{i} - (5 - 3)\vec{j} + (0 - 4)\vec{k}$$

$$= 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$4 \qquad -2 \qquad -4$$

propriedades

1) $\vec{v}\times\vec{u}=-(\vec{u}\times\vec{v})$, ou seja, os vetores $\vec{v}\times\vec{u}$ e $\vec{u}\times\vec{v}$ são opostos

como $\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{v}\times\vec{u}$

no produto vetorial *a ordem dos fatores é importante.*

2) $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ *se, e somente se,* $\vec{u}\parallel\vec{v}$

I) $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$

II) $\vec{u}\times\vec{0}=\vec{0}$

CARACTERÍSTICAS DO VETOR $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \text{ e } \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$$

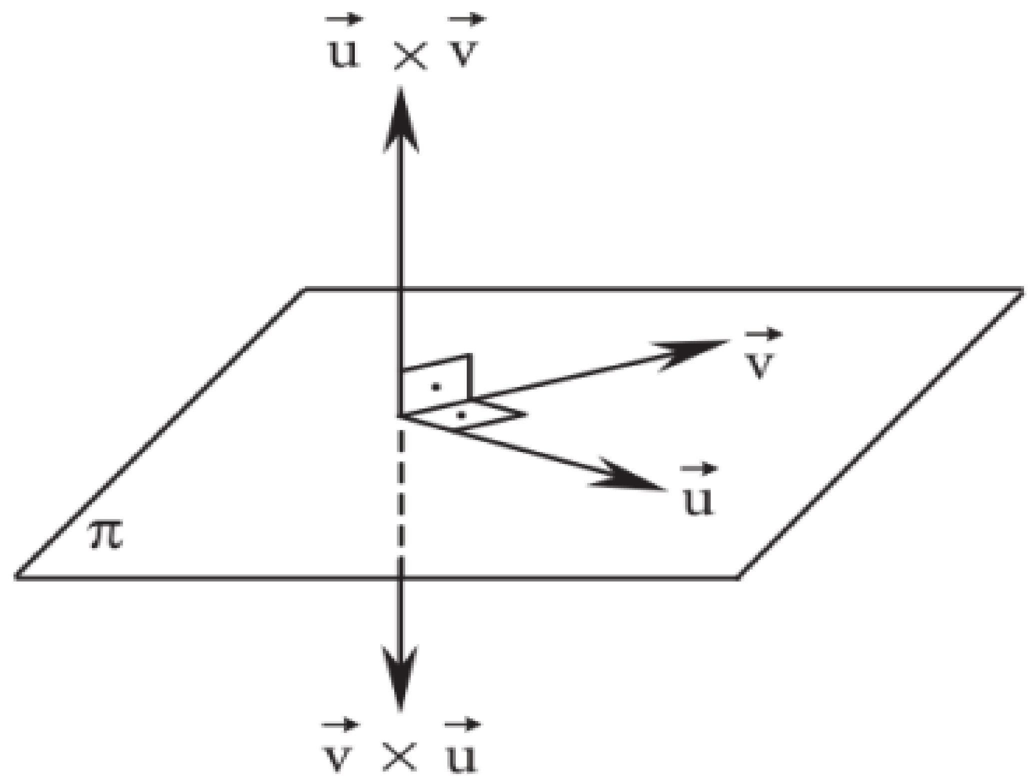
a) Direção de $\vec{u} \times \vec{v}$

O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$

basta mostrar que

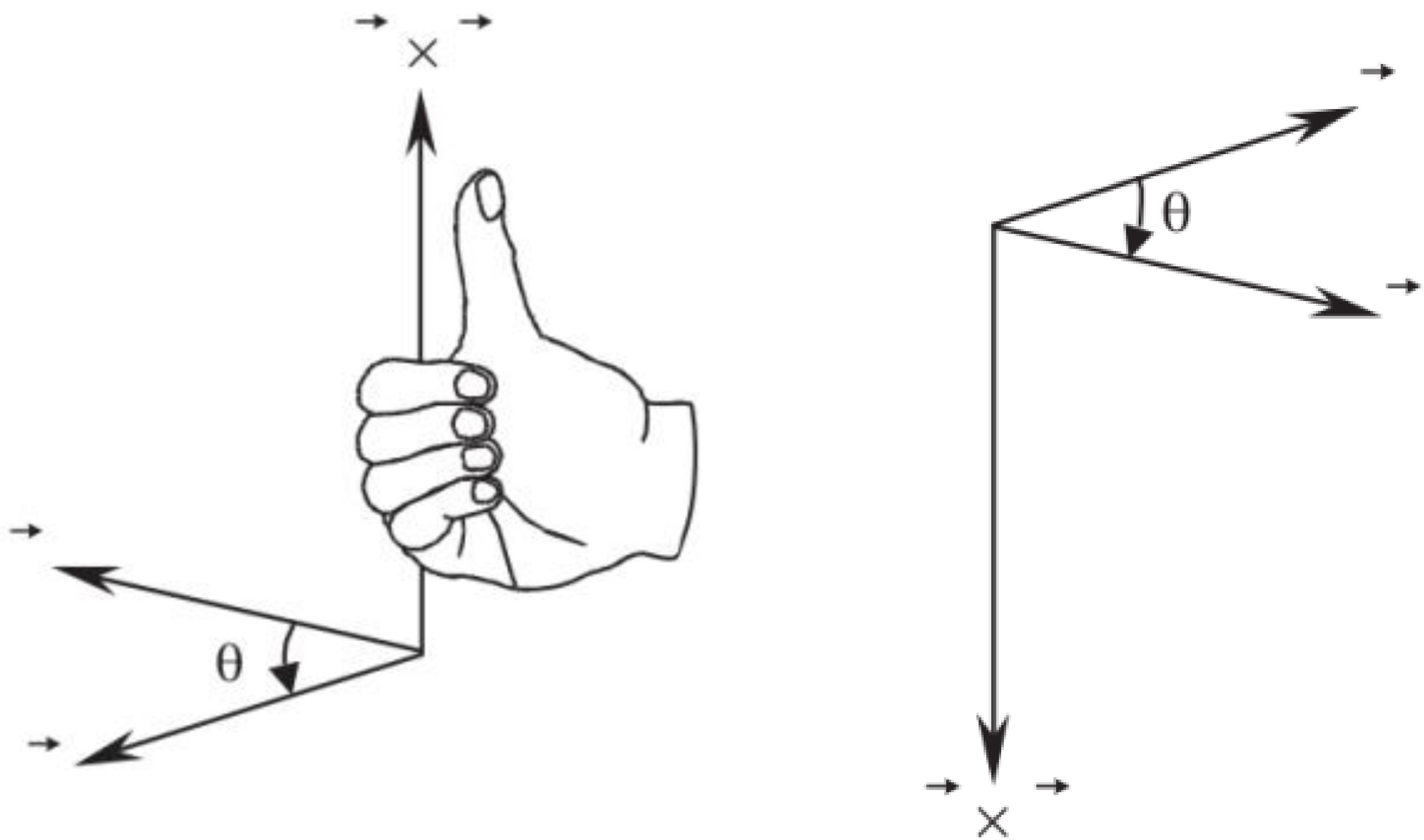
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \text{ e } (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$

Como o vetor $\vec{v}\times\vec{u}$ tem a mesma direção de $\vec{u}\times\vec{v}$ (apenas seus sentidos são opostos), ele também é ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$. A Figura 3.2 apresenta os vetores $\vec{u}\times\vec{v}$ e $\vec{v}\times\vec{u}$ ortogonais a um plano π determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

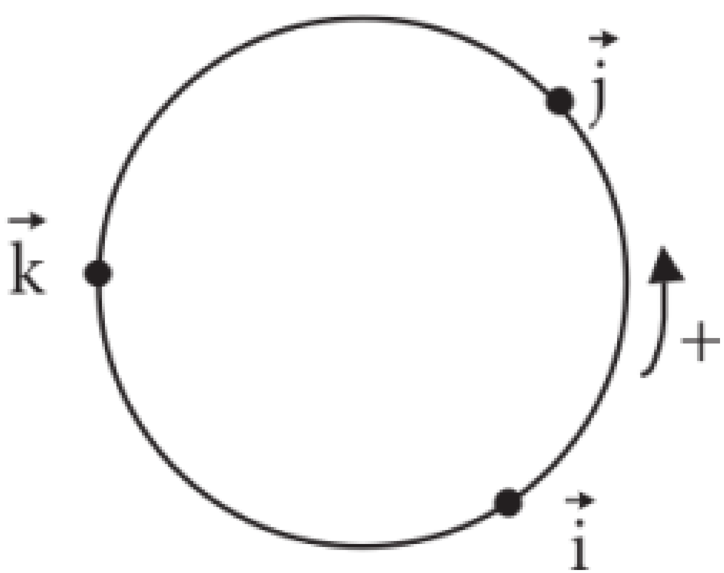


b) Sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$

O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ pode ser determinado utilizando-se a "*regra da mão direita*"



$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1) = \vec{k}$$



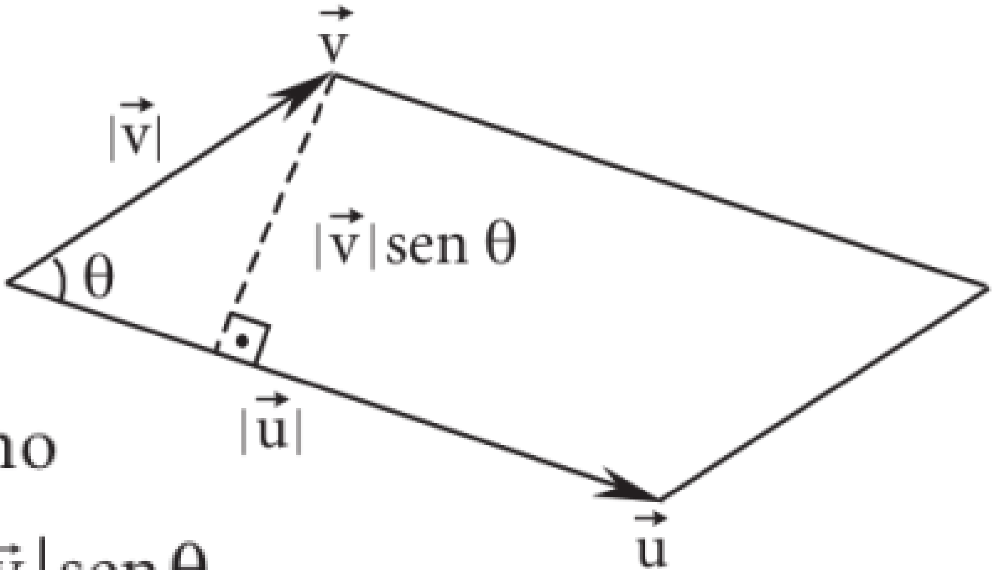
x	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

c) Comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$

Se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, então

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(3)}$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÓDULO DO PRODUTO VETORIAL



a área A deste paralelogramo

$$A = (\text{base}) \cdot (\text{altura}) = |\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}\theta$$

Para encerrar o estudo do produto vetorial, as conclusões finais são:

1) O produto vetorial *não é associativo*, ou seja, em geral é

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}\neq\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$$

$$(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$$

$$\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{j})=\vec{i}\times\vec{0}=\vec{0}$$

2) Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e o escalar α, são válidas as propriedades

I) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$ e

$(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\times\vec{w})+(\vec{v}\times\vec{w})$

II) $\alpha(\vec{u}\times\vec{v})=(\alpha\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(\alpha\vec{v})$

III) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

deixamos a cargo do leitor como desafio.

UMA APLICAÇÃO NA FÍSICA

A equação para o cálculo do torque é

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

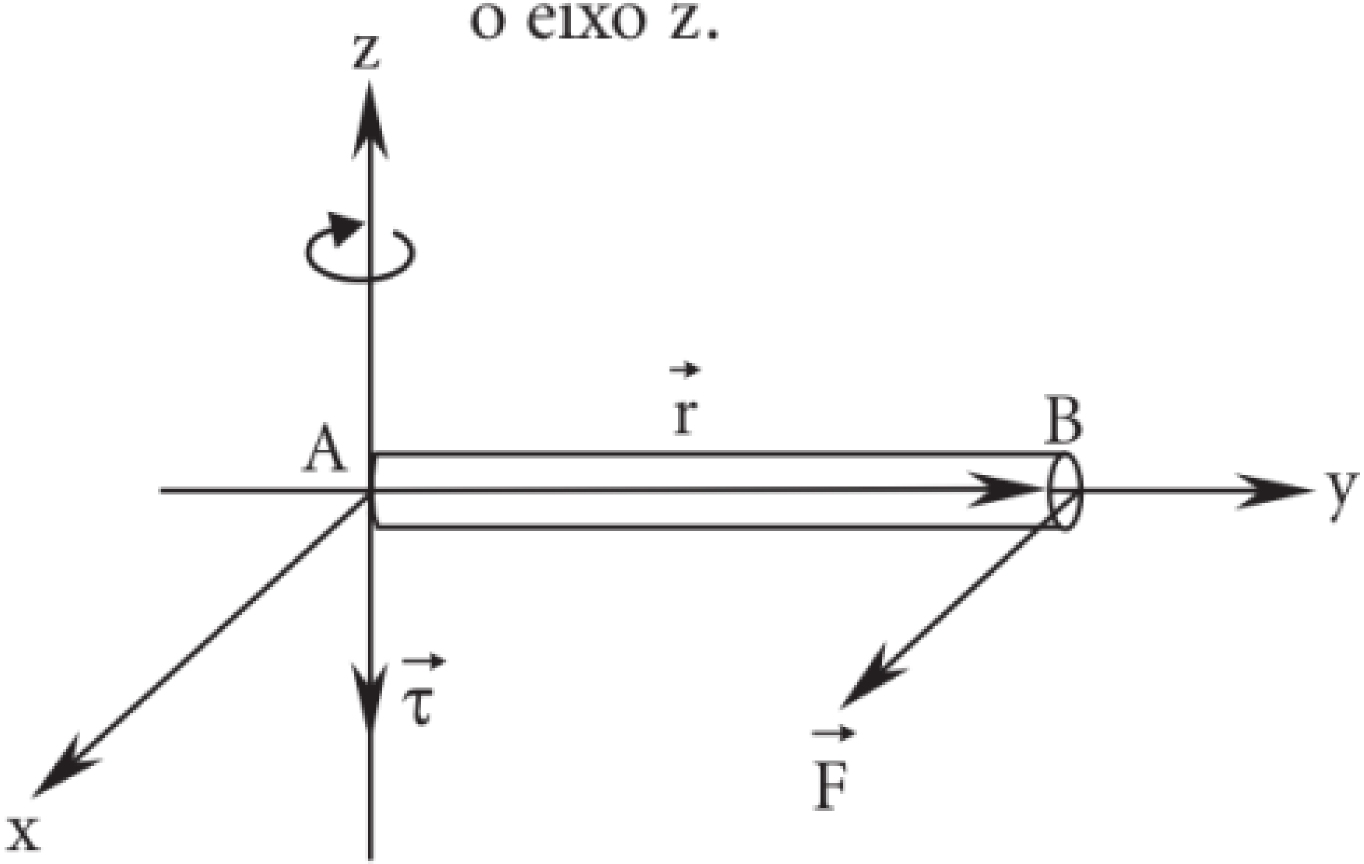
$|\vec{r}|$ é a distância do ponto de aplicação da força $\vec{F}$ ao eixo de rotação ao qual o corpo está vinculado.

Lembrando o cálculo do módulo do produto vetorial

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}| \operatorname{sen} \theta$$

em que θ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$

Calcular o torque sobre a barra $\overrightarrow{AB}$ (Figura 3.11), na qual $\overrightarrow{AB} = \vec{r} = 2\vec{j}$ (em metros), $\vec{F} = 10\vec{i}$ (em newtons) e o eixo de rotação é o eixo z.



Solução

O vetor torque, para o caso dessa figura, é dado por

$$\vec{\tau} = (0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k})\text{m} \times (10\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})\text{N}$$

$$\vec{\tau} = (0\vec{i} + 0\vec{j} - 20\vec{k})\text{mN}$$

$$\vec{\tau} = (-20\vec{k})\text{mN}$$

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{(-20)^2} = 20\text{mN}$$