Lógica

Professor Mauro Cesar Scheer

A **lógica**, ciência do raciocínio dedutivo, estuda a **relação de conseqüência**, tratando entre outras coisas das **inferências válidas**, ou seja, das inferências cujas conclusões têm que ser verdadeiras quando as premissas o são.

A lógica pode, portanto, ser considerada como “o estudo da razão” ou “o estudo do raciocínio”.

O objetivo da lógica consiste, então, na menção e estudo dos **princípios lógicos** usados no **raciocínio dedutivo**.

A **lógica matemática** adota como regras fundamentais do pensamento os dois seguintes princípios (ou axiomas):

Princípio da Não Contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Princípio do Terceiro Excluído: Toda proposição ou é verdadeira ou falsa.

Linguagens formais são objetos matemáticos, cujas regras de formação são precisamente definidas e as quais podemos atribuir um único sentido, ***sem ambiguidades***.

Linguagens formais podem ter diversos níveis de expressividade. Em geral, **quanto maior a expressividade, maior também a complexidade** de se manipular essas linguagens.

Iniciaremos nosso estudo da lógica a partir de uma ***linguagem proposicional***, que tem uma expressividade limitada, mas já nos permite expressar uma série de relações lógicas interessantes.

Nas linguagens naturais, como a língua portuguesa, as sentenças podem ser classificadas de diversas formas, tais como:

- Interrogativas: Que horas são?
- Imperativas: Lave as roupas agora!
- Declarativas: Joana é uma pessoa legal.
- Exclamativas: Que belo jardim é o desta praça!

Na lógica restringimo-nos a uma classe de proposições, ***as DECLARATIVAS***, ao qual podemos atribuir **um valor de verdade** (verdadeiro ou falso).

Nem toda sentença pode assumir um valor de verdade.

Por exemplo:

“Esta sentença é falsa.”

Esse tipo de sentença é chamado de **auto-referente** e deve ser excluída da linguagem.

Queremos discutir as leis do raciocínio que envolvem sentenças declarativas, chamadas de **Proposições**. Será necessário, é claro, indicá-las de algum modo. Em geral, usaremos letras latinas como **P, Q, R, p, q, r, s, etc**. Eventualmente poderemos utilizar índices e falar sobre a proposição P1, ou a proposição Q2, etc.

Como na língua portuguesa, proposições podem ser combinadas para formar outras. Se **P e Q são proposições**, então podemos falar de

“**não P**”, “**P e Q**”, “**P ou Q**”, “**se P, então Q**” (1)

“não P” — NEGAÇÃO

“P e Q” — CONJUNÇÃO

“P ou Q” — DISJUNÇÃO

“se P, então Q” — IMPLICAÇÃO

A **negação** será indicada por ¬ ou ~; assim, ¬P é a expressão formal da **negação da proposição P**.

A **conjunção** será indicada por ∧; **P ∧ Q** representa a frase “P e Q”, chamada de **conjunção de P e Q**.

A **disjunção** será indicada por ∨; **P ∨ Q** representa a declaração “P ou Q”.

A implicação será indicada por →; **P → Q** representa formalmente “se P, então Q”.

Os símbolos ¬, ∧, ∨ e → são chamados conectivos lógicos. Com eles, podemos produzir novas proposições a partir de outras.

Um instrumento básico para construir uma linguagem é um alfabeto.

Símbolos do alfabeto

1. Um conjunto não vazio At de símbolos, chamados **proposicões atômicas**, indicadas por letras como p, q, r, s ... Como já comentamos antes, podemos usar índices e falar sobre a proposição atômica p1 ou q3, etc.

2. Símbolos para os **conectivos lógicos** : **¬, ∧, ∨, →**

3. Parênteses à direita e à esquerda: **(,)**

Fórmulas da Lógica Proposicional

O conjunto das fórmulas da lógica proposicional, **Form(L)**, é o menor conjunto satisfazendo as regras de formação:

1. Caso básico: Todos os símbolos proposicionais estão em Form(L), i.e, $At \subseteq Form(L)$.

2. Caso Indutivo 1: Se $A \in Form(L)$ então $\sim A \in Form(L)$.

3. Caso Indutivo 2: Se $A, B \in Form(L)$ então $(A \wedge B) \in Form(L)$, $(A \vee B) \in Form(L)$ e $(A \rightarrow B) \in Form(L)$.

Os símbolos proposicionais são chamados de fórmulas atômicas ou átomos.

Se p, q, r são símbolos proposicionais, então:

$$\sim p, \quad \sim\sim r, \quad (p \vee q), \quad ((r \wedge p) \to q), \quad ((r \to p) \wedge q)$$

são fórmulas da linguagem proposicional.

Os parênteses mais externos de uma fórmula podem ser omitidos. Podemos escrever , $p \wedge q$ no lugar de $(p \wedge q)$, $(r \wedge p) \to q$ lugar de $((r \wedge p) \to q)$.

Expressando idéias com o uso de fórmulas

Se quisermos falar sobre pessoas e suas atividades ao longo da vida, podemos utilizar os símbolos: c (criança), j (jovem), a (adulto), i (idoso), e (estudante), t (trabalhador) e s (aposentado).

- Para expressar que **um jovem trabalha ou estuda**, escrevemos $\mathbf{j \rightarrow (t \vee e)}$.
- Para expressar **a proibição de que não podemos ter uma criança aposentada**, podemos escrever $\mathbf{\sim(c \wedge s)}$.
- Para expressarmos que uma pessoa **ou é criança, ou é adulta (ou exclusivo)** escrevemos $\mathbf{(c \wedge \sim a) \vee (\sim c \wedge a)}$.

PRIORIDADE DOS CONECTIVOS

$\neg$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow$

$\leftrightarrow$

Maior Prioridade

Menor prioridade

PONTUAÇÃO

$p \to q \vee r$	significa	$p \to (q \vee r)$
$p \vee q \wedge r$	significa	$p \vee (q \wedge r)$
$p \to q \wedge \neg r \vee s$	significa	$p \to ((q \wedge (\neg r)) \vee s)$

A precedência pode ser alterada pelo uso de parênteses.

Dadas as proposições p: Maria é bonita e q: Maria é elegante, escrever na linguagem simbólica as seguintes proposições:

a) Maria é bonita e elegante.
b) Maria é bonita, mas não é elegante.
c) Não é verdade que Maria não é bonita ou elegante.
d) Maria não é bonita nem elegante.
e) Maria é bonita ou não é bonita e elegante.
f) É falso que Maria não é bonita ou que não é elegante.

RESPOSTA

a) $P \wedge Q$

b) $P \wedge \sim Q$

c) $\sim(\sim P \vee Q)$

d) $\sim P \wedge \sim Q$

e) $P \vee \sim(P \wedge Q)$

f) $\sim(\sim P \vee \sim Q)$

Semântica

O estudo da semântica da lógica clássica consiste em atribuir valores verdade às fórmulas da linguagem, verdadeiro V ou falso F.

Representamos o verdadeiro por 1.

Representamos o falso por 0.

Valoração

Uma valoração v é uma função definida da seguinte forma:

$$v: Form(L) \longrightarrow \{0, 1\}$$

v(p)= 0 ou v(p)=1	p variável proposicional
$v(\sim A)=1$	$v(A)=0$
$v(A \wedge B)=1$	$v(A)=v(B)=1$
$v(A \vee B)=1$	$v(A)=1$ ou $v(B)=1$
$v(A \rightarrow B)=1$	$v(A)=0$ ou $v(B)=1$

Note que a tabela anterior poderia ser apresentada a partir do valor 0

$v(p)=0$ ou $v(p)=1$	p variável proposicional
$v(\sim A)=0$	$v(A)=1$
$v(A\wedge B)=0$	$v(A)=0$ ou $v(B)=0$
$v(A\vee B)=0$	$v(A)=0$ e $v(B)=0$
$v(A\rightarrow B)=0$	$v(A)=1$ e $v(B)=0$

Deixando um pouco de lado o rigor matemático, podemos dizer que:

$$v(\sim A) \;=\; \sim v(A)$$

$$v(A \wedge B) \;=\; v(A) \wedge v(B)$$

$$v(A \vee B) \;=\; v(A) \text{ v } (B)$$

$$v(A \rightarrow B) \;=\; v(A) \rightarrow (B)$$

Exemplo: Sabendo que $v(((p \wedge q) \vee r) \rightarrow \sim p)=1$, o que podemos dizer sobre $v(p)$, $v(q)$ e $v(r)$.

Solução:

$v(((p \wedge q) \vee r) \rightarrow \sim p) = 1$ see

see $v(((p \wedge q) \vee r)=0$ ou $v(\sim p)=1$ see

see $(v(p \wedge q)=0$ e $v(r)=0)$ ou $v(p)=0$ see

see $((v(p)=0$ ou $v(q)=0)$ e $v(r)=0)$ ou $v(p)=0$ see

see $v(p)=v(r)=0$ ou $v(q)=v(r)=0$ ou $v(p)=0$