Método de eliminação de Gauss (escalonamento)

O método de eliminação de Gauss é um dos métodos mais usados para resolver o sistema linear. A versão adaptada denominada de Eliminação de Gauss-Jordan é um dos método mais prático para inverter matrizes. O procedimento é converter a matriz aumentada do sistema dado, numa matriz escalonada, aplicando uma sequência de operações denominados de operações elementares. Tais operações são escolhidos de forma que a solução do sistema não sejam alteradas. As operações elementares constituem de três operações básicas:

• Somar múltiplo de outra linha: Equivale a somar múltiplo da outra equação que também não altera a solução do sistema.

• Troca de linhas: A troca de linhas corresponde a troca da posição das equações, o que não influencia na solução do sistema.

• Multiplicar uma linha por número não nulo: Equivale a multiplicar um número não nulo na equação correspondente que também não altera a solução. Esta operação não é necessário na eliminação de Gauss, mas faz-se necessário no Gauss-Jordan. Para a praticidade, multiplicar e somar múltiplos podem ser realizados juntas (exceto para o cálculo numérico).

A notação usadas são:

• $L_i \leftarrow L_i + \mu L_k$ somar linha k multiplicado por μ.

• $L_i \leftrightarrow L_k$ é a troca de linha i por linha k.

• $L_i \leftarrow \lambda L_i$ multiplicar a linha i com λ. Não esquecer que λ não podem ser nulo.

Exemplo 1 : Determine a solução do sistema $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 3y+2z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$.

A matriz completa do sistema é $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Próximo passo: Zerar os elementos da coluna 1 abaixo da entrada $a_{11}=1$. Logo, $L'_3 \to L_3 - L_1$. O que resulta:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

Agora vamos para a linha 2. Temos que zerar todos os elementos abaixo do primeiro elemento não nulo desta linha, neste caso, abaixo da entrada a_{22}=3.

Próximo passo: $L'_2 \rightarrow 2L_2$. O que resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Próximo passo: $L'_3 \rightarrow 3L_3$. O que resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & 6 & -12 \end{bmatrix}$$

Próximo passo: $L'_3 \rightarrow L_3 + L_2$. O que resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{bmatrix}.$$

Agora estamos em condições ideais de resolver o sistema. Portanto, da matriz associada a este sistema é:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 6y + 4z = 2 \\ 10z = -10 \end{cases}$$,o que resulta em

$$10z = -10 \rightarrow z = -1;$$

$$6y + 4z = 2 \rightarrow 6y + 4(-1) = 2 \rightarrow 6y - 4 = 2 \rightarrow 6y = 2 + 4 = 6 \rightarrow y = 1.$$

$$x + 2y - z = 5 \rightarrow x + 2(1) - (-1) = 5 \rightarrow x = 5 - 3 = 2.$$

Portanto, $x = 2$, $y = 1$ e $z = -1$.