Quantificadores e fórmulas gerais

Com a introdução de quantificadores temos, então, um terceiro tipo de fórmula, além das atômicas e moleculares que já vimos no capítulo anterior: as fórmulas *gerais*, que são, naturalmente, aquelas que se iniciam por um quantificador. A cláusula correspondente, em nossa definição de fórmula, é a seguinte:

(3) Se **x** é uma variável e α é uma fórmula na qual **x** ocorre, então $\forall \mathbf{x}\alpha$ e $\exists \mathbf{x}\alpha$ são fórmulas.

Usando L para a relação binária 'x gosta de y', vamos formalizar a sentença 'alguém gosta de Miau'. O resultado é

$$\exists x Lxm.$$

Ou seja, existe algum indivíduo, x, tal que x gosta de m, Miau.

$$\boxed{\forall x Lxm,}$$

São diferentes

ou seja, qualquer que seja x, x gosta de Miau. Note que isso é diferente de

$$\boxed{\forall x Lmx,}$$

pois essa fórmula afirma que, qualquer quer seja x, Miau gosta de x.

Em outras palavras, Miau gosta de todos.

E como faríamos com 'Se alguém gosta de Miau, então Miau gosta de alguém'? É simples. Obviamente temos um condicional (usando colchetes para indicar seus elementos):

Se [alguém gosta de Miau], então [Miau gosta de alguém].

Assim, basta transcrever o antecedente e o conseqüente, colocando → entre ambos, e parênteses ao redor:

$$(\exists x Lxm \rightarrow \exists x Lmx).$$

Ninguém é um filósofo.

Obviamente, ao dizer que ninguém é um filósofo estamos negando que alguém o seja. Portanto:

$$\neg\exists x Fx.$$

Isto é, não há nenhum *x* no universo que tenha a propriedade de ser filósofo. Porém, isso também pode ser dito usando o quantificador universal: se ninguém é um filósofo (isto é, se não existem filósofos), então qualquer que seja o indivíduo *x* no universo, *x não é* um filósofo. Assim:

$$\forall x \neg Fx.$$

nem todos são filósofos

é negar que todos sejam filósofos, isto é, estamos fazendo a negação de 'todos são filósofos', o que pode ser formalizado assim:

$$\neg\forall x Fx$$

Ou então, já que afirmar que nem todos são filósofos é afirmar que existe alguém que não é, assim:

$$\exists x\neg Fx$$

Os gatos e os cachorros são animais domésticos.

Obviamente, estamos falando de todos os gatos e cachorros. Assim, usando os predicados G, C e A, temos:

$$\forall x((Gx \vee Cx) \rightarrow Ax)$$

Note, agora, uma coisa curiosa: embora na sentença em português tenha aparecido uma conjunção — 'gatos *e* cachorros' —, na fórmula usamos $\vee$. Para perceber a razão disso, compare a fórmula anterior com a seguinte:

$$\forall x((Gx \wedge Cx) \rightarrow Ax)$$

Essa última está dizendo que qualquer coisa que seja *um gato e um cachorro* é um animal doméstico. Mas certamente não existe um indivíduo que seja gato e cachorro ao mesmo tempo.

Quantificação múltipla

Os gatos são pretos, e os cisnes são brancos

$$\forall x(Gx \rightarrow Px) \wedge \forall x(Cx \rightarrow Bx)$$

Se todos os gatos são pretos, então não existem gatos cor-de laranja.

$$\forall x(Gx \rightarrow Px) \rightarrow \neg\exists x(Gx \wedge Lx)$$

Nem todos os gatos são pretos, nem há gatos maiores que Miau que sejam cor-de-laranja.

$$\neg\forall x(Gx \rightarrow Px) \wedge \neg\exists x((Gx \wedge Mxm) \wedge Lx)$$

SILOGISMOS CATEGÓRICOS

A lógica proposicional nos permitiu uma boa análise da relação entre proposições particularmente associadas aos conectivos proposicionais $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$. Não obstante, ela tem algumas limitações, pois, como veremos na sequência, alguns argumentos que entendemos como válidos não podem ser tratados com a ferramenta proposicional. Eis alguns exemplos:

(a) Todo bauruense é paulista.
Todo paulista é brasileiro.
∴ Todo bauruense é brasileiro.

(b) Todo quadrúpede anda sobre quatro patas.
O cachorro é um quadrúpede.
∴ O cachorro anda sobre quatro patas.

(c) Se o ponto C está entre os pontos A e B, então o ponto C está entre B e A.

No cálculo proposicional, poderíamos, nos exemplos (a) e (b), chamar as premissas de **A** e **B** e a conclusão de **C** e então obteríamos $\mathbf{A \wedge B \rightarrow C}$, o que certamente não é uma tautologia, embora sejam válidos ambos os argumentos. No exemplo (c), também válido, poderíamos chamar a única premissa de **A** e a conclusão de **B** e obteríamos o argumento não tautológico $\mathbf{A \rightarrow B}$.

(a) Todo bauruense é paulista.
Todo paulista é brasileiro.
∴ Todo bauruense é brasileiro.

(c) Se o ponto C está entre os pontos A e B, então o ponto C está entre B e A.

Enunciados categóricos

Os *enunciados categóricos* ou *proposições categóricas* são sentenças universais ou particulares, afirmativas ou negativas em uma das quatro formas seguintes:

- **Afirmação universal** denotada por **A**: "Todo S é P".

Exemplos:

(a) Toda ave voa.
(b) Todo número par é divisível por 2.

- **Negação universal** denotada por **E**: "Nenhum S é P".

Exemplos

(a) Nenhum homem voa.
(b) Nenhuma cobra é vegetal.

- **Afirmação particular** denotada por **I**: "Algum S é P".

  Exemplos:

  (a) Alguns papagaios falam.
  (b) Existe um inocente preso.

- **Negação particular** denotada por **O**: "Algum S não é P".

Exemplos:

(a) Há mamíferos que não vivem na água.
(b) Alguns políticos não são sérios. O

Observemos que as proposições categóricas diferem entre si pela *qualidade*, quando afirmam ou negam, e pela *quantidade*, quando são universais ou particulares. Esses enunciados categóricos são indicados pelas letras **A**, **E**, **I** e **O** como referências às palavras **A**FF**I**RMO e N**E**G**O** (do latim).

Observamos que cada enunciado categórico tem uma constituição dada por um termo, ou sujeito (S), associado por meio de um verbo de ligação a uma propriedade, ou predicado (P). Além das proposições categóricas, também usamos os *enunciados singulares*, nos quais é particularizado um termo ou sujeito.

Exemplos:

(a) João é estudante.

(b) Ele não é normal.

Usando os quantificadores universal e existencial e os conectivos lógicos, podemos interpretar as proposições categóricas da seguinte maneira:

A: $(\forall x)(S(x) \rightarrow P(x))$

"Todo S é P" ou

"Para todo x, se vale S(x), então vale P(x)" ou

"Todos elementos da classe S estão na classe P".

E: $(\forall x)(S(x) \rightarrow \neg P(x))$

"Nenhum S é P" ou

"Para todo x, se vale S(x), então não vale P(x)" ou

"Todo elemento da classe S é da classe não P".

I: $(\exists x)(S(x) \wedge P(x))$

"Algum S é P" ou

"Existe x para o qual vale S(x) e vale P(x)" ou

"Existe algum elemento da classe S que é da classe P".

O: $(\exists x)(S(x) \wedge \neg P(x))$

"Algum S não é P" ou

"Existe x tal que vale S(x) e não vale P(x)" ou

"Algum elemento da classe S é da classe não P".

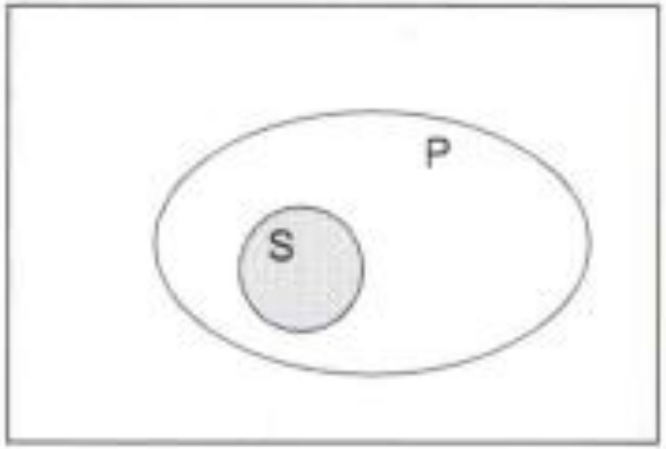
O quadro seguinte resume o que vimos até agora:

Todo A é B	$\forall x(Ax \rightarrow Bx)$
Nenhum A é B	$\forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)$
Algum A é B	$\exists x(Ax \wedge Bx)$
Algum A não é B	$\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$

Interpretação conjuntista

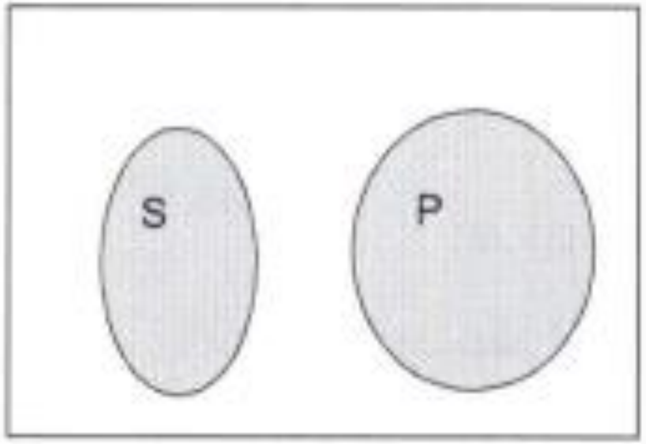
A: $(\forall x)(S(x) \rightarrow P(x))$

$S \subseteq P$



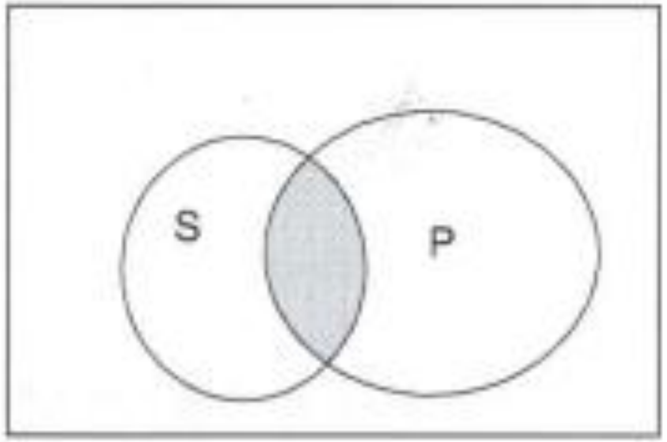
E: $(\forall x)(S(x) \rightarrow \neg P(x))$

$S \cap P = \varnothing$



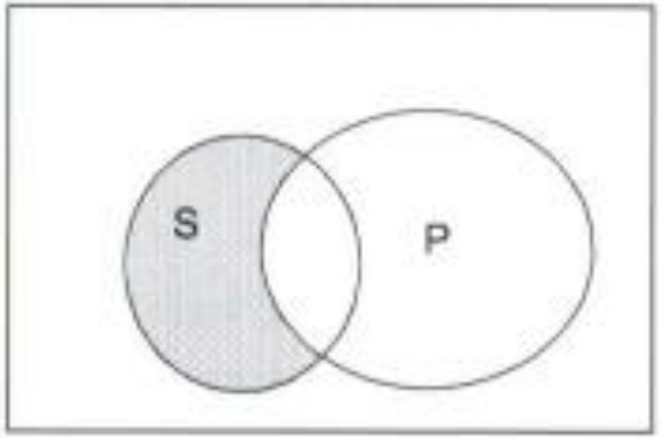
I: $(\exists x)(S(x) \wedge P(x))$

$S \cap P \neq \varnothing$



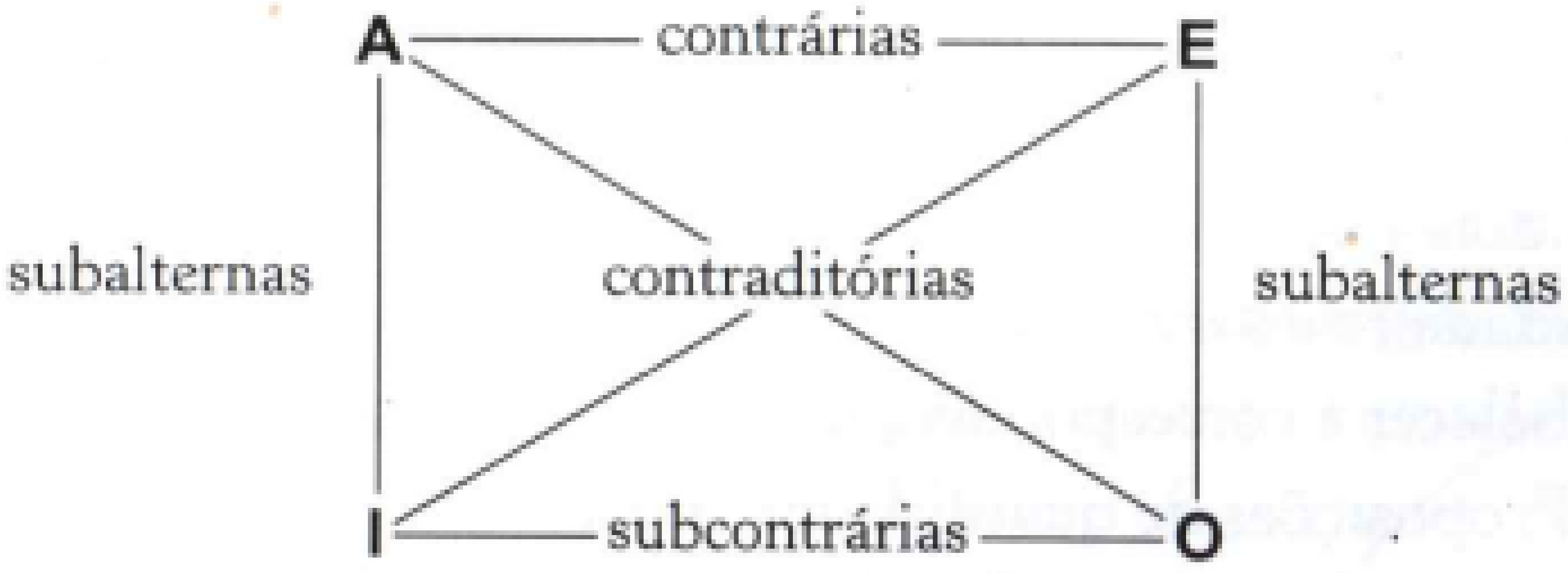
O: $(\exists x)(S(x) \wedge \neg P(x))$

$S - P \neq \varnothing$



Quadrado das oposições

As relações entre as quatro formas de proposições categóricas (enunciados categóricos) são colocadas num quadrado denominado *quadrado das oposições*:



Contraditórias: duas proposições são contraditórias se não podem ser ambas verdadeiras e ambas falsas concomitantemente, ou seja, são *contraditórias* as proposições **A** e **O** e também **E** e **I**.

Contrárias: duas proposições são contrárias se não podem ser ambas verdadeiras, mas podem ser ambas falsas, ou seja, são *contrárias* as proposições **A** e **E**.

Subcontrárias: duas proposições subcontrárias não podem ser ambas falsas, mas podem ser ambas verdadeiras, ou seja, são *subcontrárias* as proposições **I** e **O**.

Subalternas: são *subalternas* as proposições **A** e **I** e também **E** e **O**. Com isso, se **A** é verdadeira, então **I** também é, e se **E** é verdadeira, então **O** também é.

Dados um termo S e um predicado P, entendemos **A**, **E**, **I** e **O** como relações envolvendo S e P e denotamos um enunciado do tipo **A** por SAP, do tipo **E** por SEP, do tipo **I** por SIP e do tipo **O** por SOP.

Decorre do quadrado das oposições que a negação de um enunciado categórico é ainda um enunciado categórico e valem as seguintes relações:

(i) $\neg(SAP) \Leftrightarrow SOP$;

(ii) $\neg(SEP) \Leftrightarrow SIP$.