

## Exercícios

1) Sejam  $A=\{1,4,9\}$  e  $B=\{-2,2,3\}$ . Represente por extensão e em diagrama de flechas as relações:

a)  $R_1 = \{(x, y) \in A \times B : x + y < 6\}$

e)  $R_5 = \{(x, y) \in B \times A : x < 3\}$

b)  $R_2 = \{(x, y) \in A \times B : y^2 = x\}$

f)  $R_6 = \{(x, y) \in B \times A : y + x = 4\}$

c)  $R_3 = \{(x, y) \in A \times B : x - y > 3\}$

g)  $R_7 = \{(x, y) \in B^2 : x < 0 \text{ e } y < 0\}$

d)  $R_4 = \{(x, y) \in B \times A : x = y\}$

h)  $R_8 = \{(x, y) \in A^2 : x + y > 4\}$

---

2) Dê um exemplo de uma relação não-vazia que seja:

(a) reflexiva, simétrica e não transitiva;

(b) reflexiva, transitiva e não simétrica;

(c) simétrica, transitiva e não reflexiva.

---

3. Considere as relações  $R, S, U$  sobre  $A=\{a, b, c, d, e\}$ .

a) Verifique quais das propriedades: reflexiva, simétrica, transitiva e anti-simétrica as relações abaixo não satisfazem. Justifique cada uma das respostas.

$$R = \{(a,a), (b,a), (b,d), (a,b), (b,b), (c,d), (a,d), (c,c), (d,d), (b,d), (e,e)\}.$$

$$S = \{(a,a), (b,b), (b,c)\}.$$

$$U = \{(c,a), (b,d), (e,a), (b,a), (d,c), (a,e), (a,c), (d,b), (c,d), (a,b)\}.$$

---

4) Sejam  $R$  e  $S$  duas relações binárias sobre um conjunto  $A$ .

Define-se a composição de  $R$  com  $S$ , notação  $R \circ S$ , da seguinte maneira:

$$R \circ S = \{(a,c) \in A \times A : \text{Existe } b \in A \text{ tal que } (a,b) \in S \text{ e } (b,c) \in R\}.$$

---

5) Seja  $A=\{1; 2; 3; 4; 5\}$  e  $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(3,5),(4,2),(4,5),(5,1),(5,2),(5,4)\}$ . Encontre:  $R^2$  (ou seja  $R \circ R$ ),  $R^3$  (ou seja  $R^2 \circ R$ ),  $R^4$  e  $R^5$ .

---

6) Considere o conjunto  $A=\{a, b, c, d, e\}$ .

a) Explícite uma relação não vazia  $R$  sobre  $A$  que não satisfaz a propriedade transitiva.

a) Explícite uma relação não vazia  $R$  sobre  $A$  que satisfaz a propriedade simétrica transitiva e não satisfaz a propriedade reflexiva.

---

7) Dadas as relações definidas sobre  $C=\{1,3,5\}$ , qual delas alternativas mostra uma relação simétrica?

a.  $R_1 = \{(1,3), (5,3), (5,5), (3,5)\}$

b.  $R_2 = \{(1,3), (3,1), (5,5), (1,5)\}$

c.  $R_3 = \{(3,1), (3,3), (5,5), (5,1)\}$

d.  $R_4 = \{(1,1), (3,3), (5,5)\}$

---

8) A relação  $R=\{(1,3), (3,3), (2,4), (3,1), (2,3), (3,2)\}$  definida sobre  $A=\{1,2,3,4,5\}$  é simétrica?

---

9) Sejam as relações definidas nos conjuntos indicados. Qual delas é uma relação transitiva?

a.  $R = \{(2,6), (6,8), (8,2)\}$ , conjunto  $A = \{2,6,8\}$ .

b.  $S = \{(1,3), (3,4), (1,2)\}$ , conjunto  $B = \{1,2,3,4\}$ .

c.  $T = \{(1,3), (3,5), (1,5)\}$ , conjunto  $C = \{1,3,5\}$ .

d.  $V = \{(1,2), (2,3), (3,2)\}$ , conjunto  $D = \{1,2,3\}$ .

---

10) Dado o conjunto  $A=\{1,3,8\}$  e as relações sobre  $A$  listadas abaixo, indique qual alternativa mostra uma relação anti-simétrica. Justifique porque as outras relações não são anti-simétricas.

a.  $R_1 = \{(1,3), (3,1), (8,1)\}$

b.  $R_2 = \{(1,8), (8,8), (1,3), (8,1)\}$

c.  $R_3 = \{(3,3), (1,8), (8,8), (8,1)\}$

d.  $R_4 = \{(8,8), (1,3), (8,1), (1,1)\}$

---

11) Seja  $A=\{2,4\}$  e  $B=\{6,8,10\}$  e defina as relações binárias  $R$  e  $S$  como:

$xRy$  se, e somente se,  $x|y$  ( $x$  divide  $y$ )

$xSy$  se, e somente se,  $y-4 = x$

Liste os pares ordenados que estão em  $A \times B$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $R \cup S$ ,  $R \cap S$ .

---

12) Sejam os conjuntos  $A=\{1; 2; 3\}$ ,  $B=\{1; 2; 3; 4\}$  e  $C=\{0,1,2\}$ .

Qual é a composição das relações  $R$  e  $S$  onde  $R \subseteq A \times B$ , com  $R=\{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$  e  $S \subseteq B \times C$  com  $S=\{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$ ?

---

13) Seja  $A=\{1,2,3,4,\dots,9\}$  e se  $R$  uma relação sobre  $A \times A$  tal que definida por:

$(a,b)R(c,d)$  se, e somente se,  $a+d=b+c$

Prove que  $R$  é uma relação de equivalencia.

---

14) Sejam  $R$  e  $S$  relações em um conjunto  $A$ , relações não-vazias. Assumindo que  $A$  tem pelo menos 3 elementos, verifique se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa. Se falsa, dê um contra-exemplo no conjunto  $A=\{1,2,3\}$ .

a)  $R$  e  $S$  são simétricas então  $R \cap S$  é simétrica.

e)  $R$  e  $S$  são transitivas então  $R \cup S$  é transitiva.

b)  $R$  e  $S$  são simétricas então  $R \cup S$  é simétrica.

f)  $R$  e  $S$  são antisimétricas então  $R \cup S$  é antisimétrica.

c)  $R$  e  $S$  são reflexivas então  $R \cup S$  é reflexiva.

g)  $R$  é antisimétricas então  $R^{-1}$  é antisimétrica.

d)  $R$  e  $S$  são reflexivas então  $R \cap S$  é reflexiva.

h)  $R$  é reflexiva então  $R \cap R^{-1}$  é não-vazia.

---