UMA AXIOMATIZAÇÃO PARA O CÁLCULO PROPOSICIONAL CLÁSSICO

A APRESENTAÇÃO AXIOMÁTICA DE UM SISTEMA DE LÓGICA CONSISTE EM APRESENTAR A LINGUAGEM DO SISTEMA E DEFINIR AS EXPRESSÕES BEM FORMADAS (DEFINIÇÃO DE FÓRMULAS).

O PASSO SEGUINTE CONSISTE EM SELECIONAR DENTRE O CONJUNTO DE TODAS AS FÓRMULAS, UM SUBCONJUNTO DE FÓRMULAS QUE CONSISTIRÁ NOS ENUNCIADOS PRIMITIVOS, OU AXIOMAS DO SISTEMA. FEITO ISTO, SÃO INDICADAS AS REGRAS DE INFERENCIA DO SISTEMA.

Usaremos os seguintes esquemas de axiomas

$$A_1 : A \to (B \to A)$$

$$A_2 : (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

$$A_3 : (\sim A \to \sim B) \to ((\sim A \to B) \to A)$$

Axiomatizando o **CPC** através de esquemas, temos, claro, um conjunto infinito de axiomas.

Todas as fórmulas abaixo são instâncias de A1 — ou axiomas A1

$$A_1 : A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$q \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$p \rightarrow (p \rightarrow p)$$

$$\sim\sim q \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow \sim\sim q)$$

$$(p \wedge \sim q) \rightarrow ((s \leftrightarrow r) \rightarrow (p \wedge \sim q))$$

Além dos axiomas, temos num sistema formal as regras de inferência. A única regra de inferência de nosso sistema será a regra de *MODUS PONENS (MP)*:

De α *e* $\alpha \rightarrow \beta$ e podemos inferir β

Definição: Seja α uma fórmula. Uma *prova* (ou *demonstração*) de α *no* CPC é uma seqüência finita $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ de fórmulas, tal que $\alpha_n = \alpha$ e para todo *i*, $1 \leq i \leq n$,

(i) α_i é um axioma de *F*, ou

(ii) α_i foi obtida a partir de fórmulas que aparecem antes na seqüência por meio da aplicação de alguma regra de inferência de *no CPC*.

Vamos mostrar que $p \to p$ é um teorema da axiomatização do CPC.

Considere a sequência de 5 fórmulas apresentada a seguir:

1. $p \to (p \to p)$ A1
2. $p \to ((p \to p) \to p)$ A1
3. $(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$ A2
4. $(p \to (p \to p)) \to (p \to p)$ 2,3 MP
5. $p \to p$ 1,4 MP

Uma vez que temos essa prova, está demonstrado que $p \rightarrow p$ é um teorema do *CPC*. Notação: $\vdash_{\text{cpc}} p \rightarrow p$.

A noção (sintática) de um *teorema* corresponde à noção semântica de uma *fórmula válida* ou, no nosso caso, de uma tautologia. Assim, ao caracterizarmos o **CPC** **semanticamente** **como o *conjunto de todas as tautologias***, podemos agora caracterizá-lo **sintaticamente** como o *conjunto* ***de todos os teoremas*** .

Obviamente, tal caracterização pressupõe uma que tenhamos demonstrado:

uma fórmula é uma tautologia se e somente se for um teorema

Teorema 1.1: $\models_{CPC} p \rightarrow p$ *se e somente se* $\vdash_{CPC} p \rightarrow p$.

Este teorema é chamado de Teorema de Correção e Completude.

Voltando às correspondências entre sintaxe e semântica, tínhamos antes uma noção semântica de consequência lógica. Podemos ter também uma noção sintática. Para isso, precisamos definir o que seja uma dedução no CPC.

Definição 1.5: Sejam Γ um conjunto qualquer de fórmulas e α uma fórmula. Uma ***dedução*** de α a partir de Γ é uma seqüência finita $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de fórmulas, tal que $\alpha_n = \alpha$ e para todo i, $1 \leq i \leq n$, temos

(i) α_i é um axioma ou

(ii) $\alpha_i \in \Gamma$ ou

(iii) α_i foi obtida a partir de fórmulas que aparecem antes na seqüência, por meio da aplicação de alguma regra de inferência.

Definição 1.6: Seja Γ um conjunto qualquer de fórmulas e α uma fórmula . Dizemos que é α *conseqüência lógica* de Γ ou que ***α é dedutível de Γ***, o que denotamos por $\Gamma \vdash_{CPC} \alpha$, se há uma dedução de α a partir de Γ.

Vamos a um exemplo de uma dedução em *P*, nossa axiomatização do **CPC**. Mostraremos $p \to q, q \to r \vdash p \to r$ ($\Gamma = \{$p $\to$q, q $\to$ r$\}$)

1. $p \to q$ fórmula de Γ
2. $q \to r$ fórmula de Γ
3. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ A2
4. $(q \to r) \to (p \to (q \to r))$ A1
5. $p \to (q \to r)$ 2,4 MP
6. $(p \to q) \to (p \to r)$ 3,5 MP
7. $p \to r$ 1,6 MP

Definidas as noções de conseqüência semântica e sintática, coloca-se imediatamente a questão:

Coincidem as noções semântica e sintática de conseqüência lógica? (o conjunto de fórmulas válidas é o mesmo conjunto de teoremas)

Podemos demonstrar que para o CPC que isso acontece,ou seja, temos uma versão mais forte do metateorema anterior, a saber:

Teorema 1.2 : $\Gamma \models_{CPC} \alpha$ se e somente se $\Gamma \vdash_{CPC} \alpha$.