Funções Proposicionais e Quantificadores

* Predicados são utilizados para falar sobre propriedades de objetos, definindo o conjunto de todos os objetos que possuem certa propriedade em comum.

*O conjunto definido por $P(x)$ é escrito como $\{x \mid P(x)\}$ (coleção de todos os objetos para qual P é verdade).

<u>Exemplo:</u>

$\{x \mid x$ é um inteiro positivo menor que $4\} = \{1,2,3\}$.

P*(*x*)** é chamado de ***predicado e ***x*** de ***sujeito*** da proposição.

***P*(*x*)** é também chamado de uma **função proposicional**, visto que cada x produz uma proposição.

Exemplos:Determine o conjunto verdade de cada função proposicional em $\aleph$(conjunto dos números naturais).

a) P(x): "x+2>7" **Solução: $\{x \in \aleph: x+2>7\}=\{6,7,8,\ldots\}$.**

b) Q(x): "x+2<0" **Solução: $\{x \in \aleph: x+2<0\}=\varnothing$.**

c) P(x,y): "x+y=5" **Solução: $\{(x,y) \in \aleph x \aleph: x+y=5\}=$**

$=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(0,5), (5,0)\}$

Os exemplos anteriores mostram que se P(x) é um predicado definido em A, então:

P(x) pode ser verdadeiro para todo x pertencente a A;

Algum x pertencente a A ou

Nenhum x pertencente a A.

Quantificador Universal ($\forall$)

Se P(x) é um predicado definido em A, então:

$\forall x P(x)$ leia-se

"Para todo x em A tal que p(x) é uma declaração verdadeira" ou "Para todo x, P(x)".

"$\forall$" *é dito quantificador universal*

Note que a expressão P(x) é uma sentença aberta e portanto não tem valor lógico.

Exemplos:

a) Se $P(x)$: "$x+2>1$" está definida em $\aleph$ então $\forall x P(x)$ é verdadeira.

b) Se $Q(x)$: "$x+2>8$" está definida em $\aleph$ então $\forall x Q(x)$ é falsa. De fato, para $x=1$, $1+2<8$.

Quantificador Existencial ($\exists$)

Se P(x) é um predicado definido em A, então:

$\exists$ xP(x) leia-se

"Existe um x em A tal que p(x) é uma declaração verdadeira" ou "Para algum x, P(x)".

"$\exists$" é dito quantificador existencial

Note que a expressão P(x) é uma sentença aberta e portanto não tem valor lógico.

Exemplos:

a) Se $P(x)$: "$x+2<1$" está definida em $\aleph$ então $\exists x P(x)$ é falsa.

b) Se $Q(x)$: "$x+2>8$" está definida em $\aleph$ então $\exists x Q(x)$ é verdadeira. De fato, para $x=10$, $10+2>8$.

Notação

Seja $A = \{2, 3, 5\}$, e seja $p(x)$ a sentença "x é um número primo" ou, simplesmente, "x é primo". Então,

"Dois é primo e três é primo e cinco é primo"

pode ser denotada por

$$p(2) \wedge p(3) \wedge p(5) \qquad \text{ou}$$

que é equivalente à declaração

"Todo número em A é primo" $\qquad \forall x P(x)$

Analogamente, a proposição

"Dois é primo ou três é primo ou cinco é primo"

pode ser denotada por

$$p(2) \vee p(3) \vee p(5) \qquad \text{ou}$$

que é equivalente à declaração

"Pelo menos um número em A é primo" $\qquad \exists x P(x)$

Negação de declarações com quantificadores

Teorema 4.6:

(a) $\sim\forall x P(x) \equiv \exists x \sim P(x)$.

(b) $\sim\exists x P(x) \equiv \forall x \sim P(x)$.

Contra-exemplo

O Teorema 4.6 diz que mostrar que uma declaração $\forall x, p(x)$ é falsa é equivalente a mostrar que $\exists x \neg p(x)$ é verdade ou, em outras palavras, que existe um elemento x_0 com a propriedade de que $p(x_0)$ é falsa. Tal elemento x_0 é dito um *contra-exemplo* para a declaração $\forall x, p(x)$.

Negação de declarações com quantificadores

Teorema 4.6:

(a) $\sim\forall x P(x) \equiv \exists x \sim P(x)$.

(b) $\sim\exists x P(x) \equiv \forall x \sim P(x)$.

Contra-exemplo

O Teorema 4.6 diz que mostrar que uma declaração $\forall x, p(x)$ é falsa é equivalente a mostrar que $\exists x \neg p(x)$ é verdade ou, em outras palavras, que existe um elemento x_0 com a propriedade de que $p(x_0)$ é falsa. Tal elemento x_0 é dito um *contra-exemplo* para a declaração $\forall x, p(x)$.

Proposições categóricas

- Todo A é B (universal afirmativa)
- Nenhum A é B (universal negativa)
- Algum A é B (particular afirmativa)
- Algum A não é B (particular negativa)

Todo A é B	$\forall x(Ax \rightarrow Bx)$
Nenhum A é B	$\forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)$
Algum A é B	$\exists x(Ax \wedge Bx)$
Algum A não é B	$\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$

Quantificação múltipla

Os gatos são pretos, e os cisnes são brancos.

A tradução para a linguagem do CQC é óbvia:

$$\forall x(Gx \to Px) \land \forall x(Cx \to Bx)$$

Se todos os gatos são pretos, então não existem gatos cor-de-laranja.

Usando G, P e L para as propriedades envolvidas, teremos:

$$\forall x(Gx \to Px) \to \neg\exists x(Gx \land Lx),$$

Nem todos os gatos são pretos, nem há gatos maiores que Miau que sejam cor-de-laranja.

Usando agora, além do que já tínhamos, M para a relação 'x é maior que y', obtemos

$$\neg \forall x(Gx \to Px) \wedge \neg \exists x((Gx \wedge Mxm) \wedge Lx).$$

Os casos mais interessantes envolvendo quantificadores, porém, ocorrem quando há mais de um quantificador e um ocorre dentro do escopo do outro. Por exemplo, considere a sentença 'todos gostam de alguém'. Ela pode ser parafraseada do seguinte modo: 'qualquer que seja *x*, há um y do qual ele gosta', i.e.:

qualquer que seja *x*, há um *y* tal que *x* gosta de *y*.

Na linguagem do **CQC**, usando G para '*x* gosta de *y*':

$$\forall x \exists y Gxy.$$

A propósito, a ordem dos quantificadores é de fundamental importância. A fórmula seguinte, parecida com a anterior, mas com a ordem dos quantificadores invertida, diz algo bem diferente:

$$\exists y \forall x Gxy.$$

Digamos que queremos agora formalizar as sentenças 'há alguém que não gosta de ninguém' e 'há alguém que não gosta de todos'. A primeira fica como se segue:

$$\exists x \forall y \neg Gxy,$$

que diz que há um x tal que, qualquer que seja y, x não gosta de y. Isto é, x não gosta de nenhum y mesmo — não gosta de ninguém.

Diferentemente disso, a segunda sentença, que diz que alguém não gosta de todos, é ambígua. Por um lado, ela pode estar significando que há alguém que, embora goste de algumas pessoas, não gosta de todas elas sem exceção. Isto é, temos o seguinte:

$$\exists x \neg \forall y Gxy,$$

ou seja, para algum x, não é verdade que ele goste de todo e qualquer y. Por outro lado, a sentença 'há alguém que não gosta de todos' pode também significar que há alguém que não gosta de qualquer pessoa — ou seja, que não gosta de ninguém. Neste caso, essa sentença diz o mesmo que a primeira acima mencionada, e a fórmula correspondente é a mesma.

Mais um exemplo, neste caso envolvendo três quantificadores: dados três indivíduos quaisquer, se o primeiro é pai do segundo, e o segundo é mãe do terceiro, então o primeiro é avô (materno) do terceiro. Usando P, M, e A para as relações 'x é pai de y', 'x é mãe de y' e 'x é avô materno de y', respectivamente, ficamos com

$$\forall x \forall y \forall z ((Pxy \land Myz) \rightarrow Axz).$$

E algo ligeiramente parecido: se um indivíduo é avô materno de outro, então há um terceiro de quem o primeiro é o pai, e que é mãe do segundo. Isto é: quaisquer que sejam x e y, se x é avô materno de y, então há um z tal que x é pai de z e z é mãe de y. Ou seja:

$$\forall x \forall y (Axy \rightarrow \exists z (Pxz \land Mzy)).$$

Todo marciano verde que é rico possui uma casa em Syrtis Major.

Suponhamos também que você deva fazer isso utilizando a seguinte notação:

M: x é um marciano;	C: x é uma casa;
G: x é verde;	S: x fica em Syrtis Major;
R: x é rico;	P: x possui y.

Parece complicado, mas na verdade não é tanto. Para começar, note que estamos tratando de uma proposição categórica — uma universal afirmativa:

> Todo [marciano verde que é rico] [possui uma casa em Syrtis Major],

ou seja, o resultado final terá que ter a seguinte estrutura:

$$\forall x(x \text{ é marciano, verde e rico} \quad \rightarrow \quad x \text{ possui uma casa em Syrtis Major}). \tag{6}$$

A primeira parte é fácil, pois 'x é marciano, verde e rico' equivale a 'x é marciano e x é verde e x é rico'. Em símbolos: '$Mx \wedge (Gx \wedge Rx)$'. Podemos substituir isso em (6), ficando com:

$$\forall x((Mx \wedge (Gx \wedge Rx)) \rightarrow x \text{ possui uma casa em Syrtis Major}). \qquad (7)$$

há um y, tal que y é uma casa, y fica em Syrtis Major, e x possui y.

Ou seja: $\exists y(Cy \wedge (Sy \wedge Pxy))$. Substituindo isso em (7), temos a solução:

$$\forall x((Mx \wedge (Gx \wedge Rx)) \rightarrow \exists y(Cy \wedge (Sy \wedge Pxy))).$$

Não é uma beleza? E agora, divirta-se com os exercícios abaixo. (Afinal, o que você faria nas tardes de sábado se não houvesse exercícios de lógica, não é mesmo?)