This observation can be put in the form of a table which looks like this:

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

A	-A
0	1
1	0

complementar de A (*outras notações* : ~A, $\bar{A}$)

Leis de De Morgan

$$(\overline{A \bigcup B}) = \overline{A} \bigcap \overline{B}$$ (notações alternativas $\sim (A \cup B) = \sim A \bigcap \sim B$

ou $-(A \bigcup B) = -A \bigcap -B$

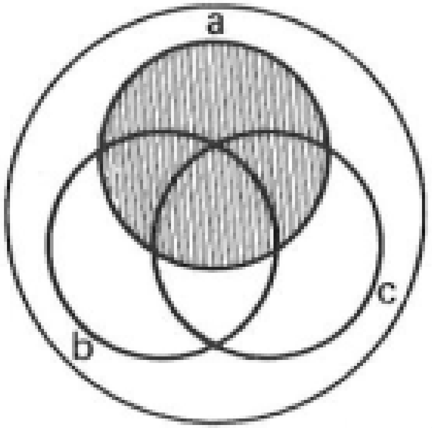
$$(\overline{A \bigcap B}) = \overline{A} \bigcup \overline{B}$$ (notações alternativas $\sim (A \bigcap B) = \sim A \bigcup \sim B$

ou $-(A \bigcap B) = -A \bigcup -B$

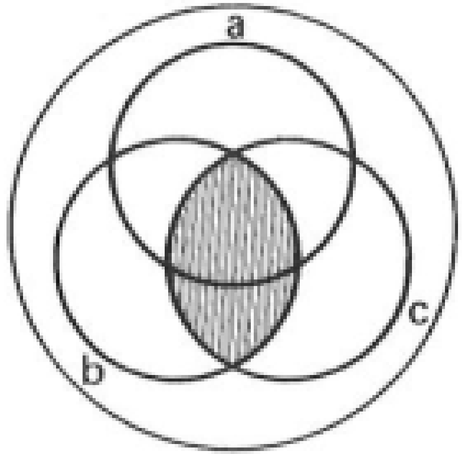
Método de prova alternativa (tabela)

A	B	$-A$	$-B$	$A \cup B$	$-(A \cup B)$	$-A \cap -B$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

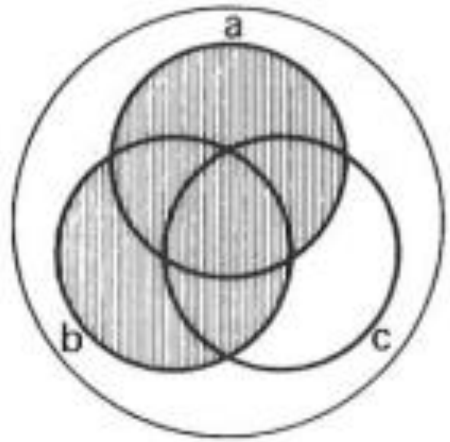
Diagramas de Venn_Euller



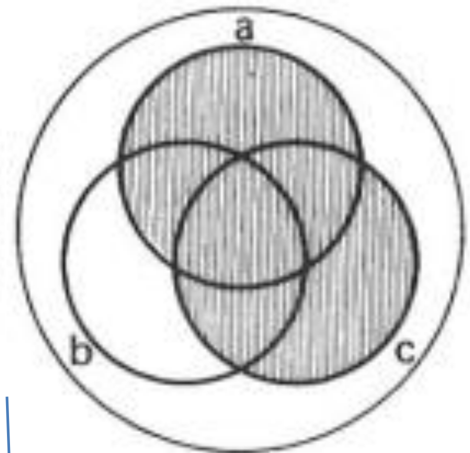
a



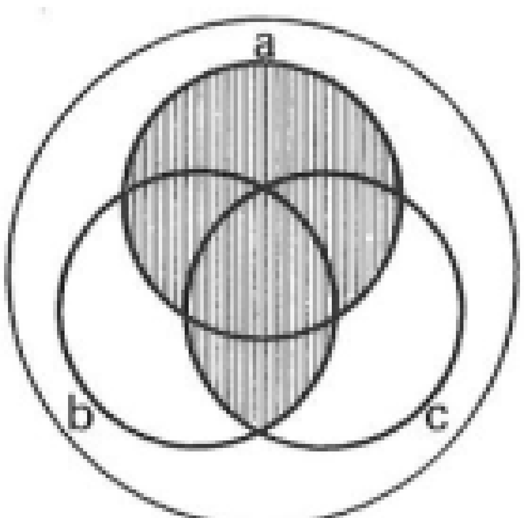
$b \cap c$

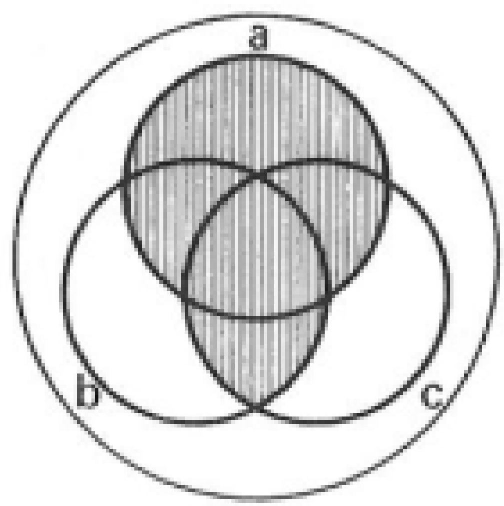


$a \cup b$



$a \cup c$

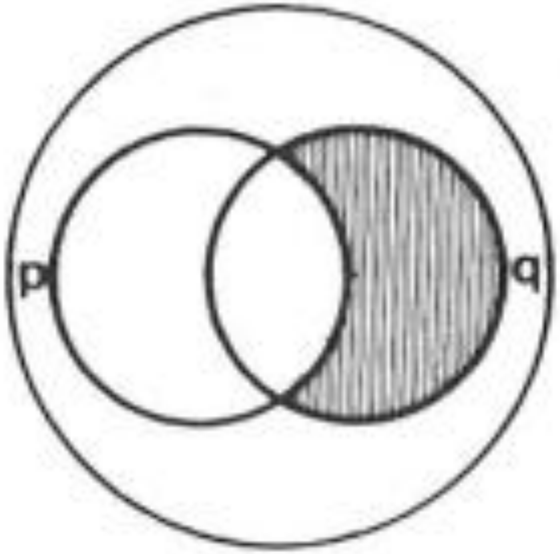




$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

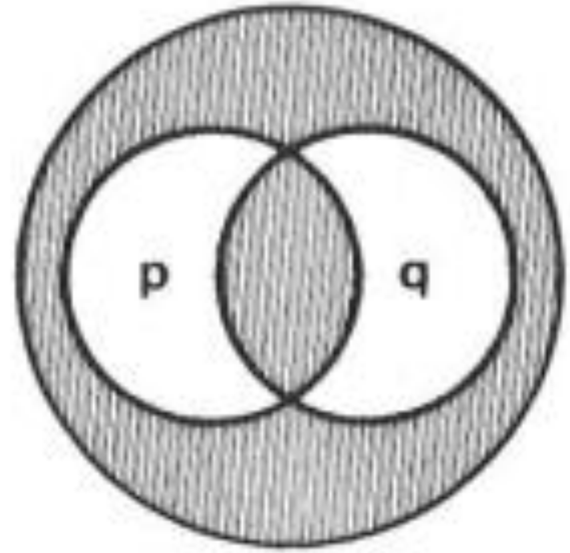
Dar as expressões correspondentes aos conjuntos hachurados:

a)



$$q - p$$

b)



$$(p \cap q) \cup (\overline{p} \cap \overline{q})$$

Definição 1.2 - Alfabeto

Um *Alfabeto* é um conjunto finito. Os elementos de um alfabeto são usualmente denominados de *símbolos* ou *caracteres*. ❑

Portanto, o conjunto vazio *é* um alfabeto, e um conjunto infinito *não* é um alfabeto.

Definição 1.3 - Palavra, Cadeia de Caracteres, Sentença

Uma *Palavra* ou *Cadeia de Caracteres* ou *Sentença* sobre um alfabeto é uma seqüência finita de símbolos (do alfabeto) justapostos. ❑

Portanto, uma cadeia sem símbolos é uma palavra válida, e o símbolo:

ε denota a *cadeia vazia*, *palavra vazia* ou *sentença vazia*.

Se Σ representa um alfabeto, então:

Σ^* denota o conjunto de todas as palavras possíveis sobre Σ

EXEMPLO 1.7 - Alfabeto, Palavra

a) Os conjuntos $\varnothing$ e $\{ a, b, c \}$ são alfabetos;

b) O conjunto **N** *não* é um alfabeto;

c) ε é uma palavra sobre o alfabeto $\{ a, b, c \}$;

d) ε é uma palavra sobre o alfabeto $\varnothing$;

e) a, e, i, o, u, ai, oi, ui e aeiou são exemplos de palavras sobre Vogais;

f) 1 e 001 são exemplos de palavras *distintas* sobre Dígitos;

g) $\{ a, b \}^* = \{ \varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \ldots \}$

h) $\varnothing^* = \{ \varepsilon \}$

Definição 1.4 - Linguagem Formal

Uma *Linguagem Formal*, ou simplesmente *Linguagem*, é um conjunto de palavras sobre um alfabeto. ❑

EXEMPLO 1.9 - Linguagens de Programação

As linguagens de programação como Pascal, C e Java são linguagens sobre o alfabeto constituído por letras, dígitos e alguns símbolos especiais (como espaço, parênteses, pontuação, etc.). Nesse caso, cada programa na linguagem corresponde a uma palavra sobre o alfabeto. Ou seja, uma linguagem de programação é definida por todos os seus programas possíveis. Portanto, Pascal, Java, C, bem como qualquer linguagem de programação de propósitos gerais, são conjuntos infinitos. ❑

Observação 1.10 - Compilador × Pertinência à Linguagem

Um *compilador* de uma linguagem de programação é um *software* que traduz um programa escrito na linguagem de programação (*linguagem fonte*) para um código executável no sistema computador (*linguagem objeto*). Em geral, um compilador é estruturado em duas grandes partes: análise (*análise léxica*, *análise sintática* e *análise semântica*) e síntese (*geração* e *otimização* de código executável). Resumidamente, a análise verifica se um dado programa fonte p é, de fato, um programa válido para a linguagem L em questão, ou seja, verifica se:

$$p \in L$$ ❑

Conjuntos nas Linguagens de Programação

Adicionalmente, pode-se definir constantes e variáveis de um tipo conjunto. A definição de constantes de um tipo conjunto é realizada sempre por extensão, como, por exemplo:

```
[vermelho, amarelo, azul]
[ ]
[seg..dom]
[seg..sex]
['a', 'e', 'i', 'o', 'u']
```

os quais correspondem aos seguintes conjuntos, respectivamente:

$\{vermelho, amarelo, azul\}$

$\varnothing$

$\{seg, ter, qua, qui, sex, sab, dom\}$

$\{seg, ter, qua, qui, sex\}$

$\{a, e, i, o, u\}$

Assim, os seguintes trechos de programas em Pascal:

```
cores_primarias := [vermelho, amarelo, azul]
feriado := [ ]
semana := [seg..dom]
trabalho := [seg..sex]
vogais := ['a', 'e', 'i', 'o', 'u']
```

correspondem, na Teoria dos Conjuntos, aos seguintes conjuntos e suas denotações:

$$\text{cores\_primarias} = \{\text{vermelho, amarelo, azul}\}$$
$$\text{feriado} = \varnothing$$
$$\text{semana} = \{\text{seg, ter, qua, qui, sex, sab, dom}\}$$
$$\text{trabalho} = \{\text{seg, ter, qua, qui, sex}\}$$
$$\text{vogais} = \{a, e, i, o, u\}$$

<= (continência)
= (igualdade)

Por exemplo, suponha os trechos de programas acima e considere os seguintes trechos (observe que, no que segue, o símbolo "=" é usado com o sentido de igualdade):

```
cores_primarias = [vermelho, amarelo, azul]
feriado = trabalho
trabalho <= semana
[sab, dom] <= trabalho
'a' in vogais
dom in trabalho
```

os quais correspondem às seguintes proposições sobre a Teoria dos Conjuntos:

$\text{cores\_primarias} = \{\text{vermelho}, \text{amarelo}, \text{azul}\}$	(verdadeiro)
$\text{feriado} = \text{trabalho}$	(falso)
$\text{trabalho} \subseteq \text{semana}$	(verdadeiro)
$\{\text{sab}, \text{dom}\} \subseteq \text{trabalho}$	(falso)
$\text{a} \in \text{vogais}$	(verdadeiro)
$\text{dom} \in \text{trabalho}$	(falso)

Uma *relação binária* (ou simplesmente uma *relação*) $\mathcal{R}$ *de* um conjunto A *para* um conjunto B é um sub-conjunto de $A \times B$. Em outras palavras, é um conjunto de pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.

usa-se a notação $a\mathcal{R}b$ para dizer que $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $a\not\mathcal{R}b$ para dizer que $(a, b) \notin \mathcal{R}$

$(a, b) \in \mathcal{R}$ dizemos que *a está relacionado com b* pela relação $\mathcal{R}$.

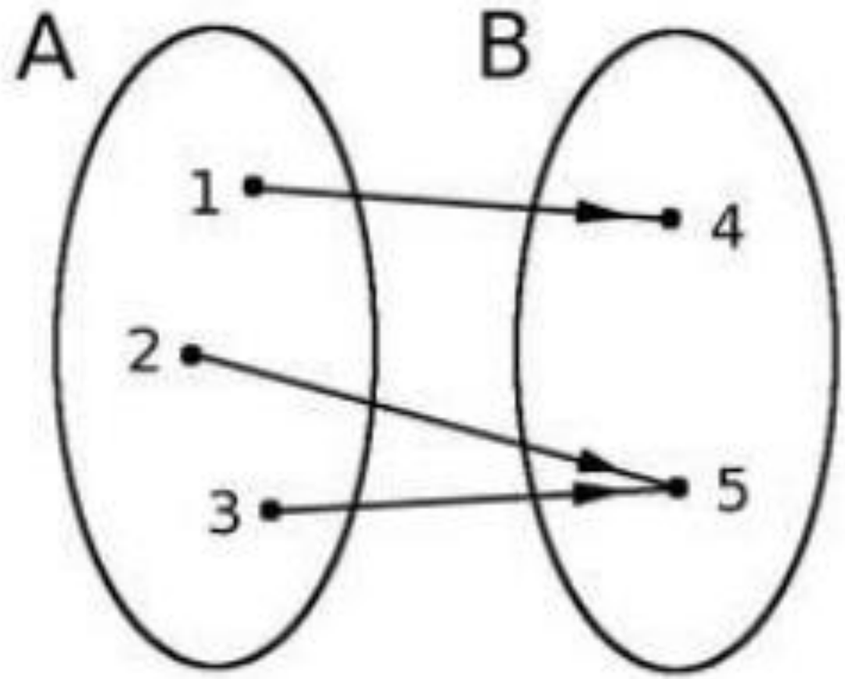
Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$.

$\mathcal{R} = \{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$ é uma relação de A para B

Neste exemplo, temos $2\mathcal{R}5$ e $3\mathcal{R}5$, mas $2\not\mathcal{R}4$ e $5\not\mathcal{R}2$.

Se os conjuntos A e B são finitos e suficientemente pequenos

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5\}$$



cada elemento de A ou B é representado por um ponto

* O conjunto de pares $\left\{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{N}\right\}$ é um exemplo de uma relação de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$.

* Se R é uma relação de A para A, dizemos que $\mathcal{R}$ é uma relação *em A* ou *sobre A*.

* os sinais de comparação da álgebra (“$<$”, “$\leq$”, etc.) são relações binárias
“$\subseteq$” é uma relação binária

Domínio e imagem

O *domínio* de uma relação $\mathcal{R}$, denotado por $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$.

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{\, a : (a, b) \in \mathcal{R} \,\}$$

A *imagem* ou *contra-domínio* de uma relação $\mathcal{R}$, denotado por $\mathrm{Img}(\mathcal{R})$.

$$\mathrm{Img}(\mathcal{R}) = \{\, b : (a, b) \in \mathcal{R} \,\}$$

$\mathcal{R}$ é uma relação de A para B se, e somente se, $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) \subseteq A$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}) \subseteq B$.

Exemplo : Seja $\mathcal{R}$ a relação $\{(1,4),(2,5),(3,5)\}$.

Temos que $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{1,2,3\}$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}) = \{4,5\}$.

Exemplo :

Seja $A = \{1,2,3\}$, e $\mathcal{R}$ o conjunto dos pares (a,b) de $A \times A$ tais que $a < b$.

$\mathcal{R} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$. Neste caso, $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{1,2\}$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}) = \{2,3\}$.

Exemplo :

Seja A o conjunto dos números reais e $\mathcal{R} = \left\{(a,b) : a^2 + b^2 = 25\right\}$

$\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{\, a : -5 \leq a \leq 5 \,\}$ e $\mathrm{Img}(\mathcal{R}) = \{\, b : -5 \leq b \leq 5 \,\}$

Relações de identidade

a relação *identidade sobre A*, denotada por $\mathcal{I}_A$, é definida por

$$\mathcal{I}_A = \{(x, x) : x \in A\}$$

Exemplo :

Se $A = \{1, 2, 3\}$ então $\mathcal{I}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

Relação inversa

$\mathcal{R}$ uma relação do conjunto A para o conjunto B

A *relação inversa* denotada por $\mathcal{R}^{-1}$, é a relação do conjunto B para o conjunto A

$$\mathcal{R}^{-1} = \{ (x, y) : (y, x) \in \mathcal{R} \}$$

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{R}^{-1}) = \mathrm{Img}(\mathcal{R}) \text{ e } \mathrm{Img}(\mathcal{R}^{-1}) = \mathrm{Dom}(\mathcal{R})$$

Composição de relações

Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ duas relações.
A *composição de $\mathcal{R}$ com $\mathcal{S}$* é a relação denotada por $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a, c) : (\exists b)\,(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{S}\}$$

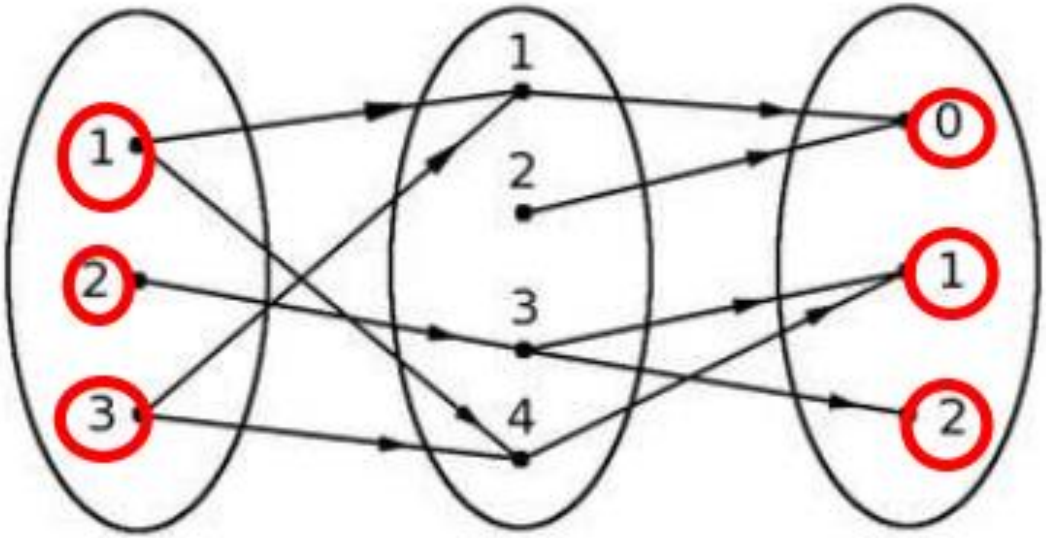
Exemplo : Considere as relações

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$$

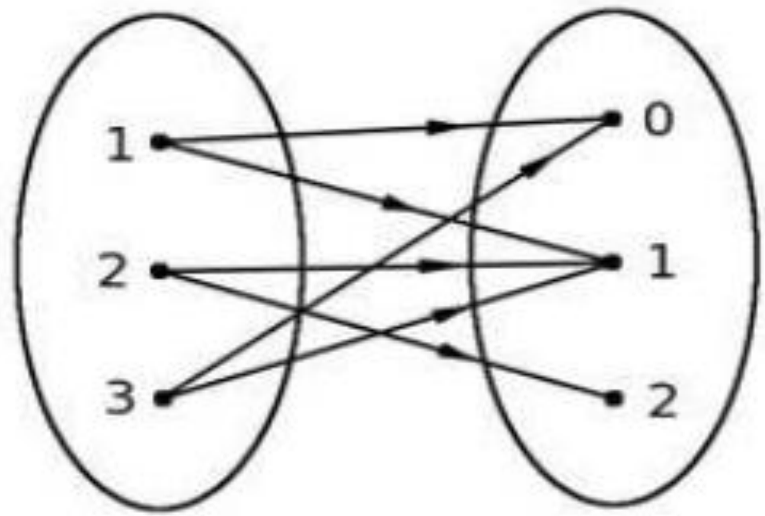
$$\mathcal{S} = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

A composição delas é

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$$



$\mathcal{R}$ $\mathcal{S}$



$\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$

Exemplo :

Seja $\mathcal{R}$ a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por $x\mathcal{R}y \leftrightarrow x = y + 1$.

Seja $\mathcal{S}$ a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por $y\mathcal{S}z \leftrightarrow y = 2z$.

A composição $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ é a relação de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ definida por

$$\boxed{x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{Z})\, x = y + 1 \wedge y = 2z}$$

$$x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \leftrightarrow x = 2z + 1$$

$(5, 2) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, porque $(5, 4) \in \mathcal{R}$ e $(4, 2) \in \mathcal{S}$.

$(6, 2) \notin \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, porque o único elemento relacionado com 6 por $\mathcal{R}$ é 5

$(5, 2) \notin \mathcal{S}$