Variáveis Aleatórias Discretas

considere o caso de um questionário em que uma pessoa é indagada a respeito de uma proposição, e as respostas possíveis são *sim* ou *não*. Podemos associar ao problema uma variável que toma dois valores, 1 ou 0, por exemplo, correspondentes às respostas *sim* ou *não*, respectivamente. Esse tipo de variável será estudado neste capítulo.

O Conceito de Variável Aleatória Discreta

Um empresário pretende estabelecer uma firma para montagem de um produto composto de uma esfera e um cilindro. As partes são adquiridas em fábricas diferentes (A e B), e a montagem consistirá em juntar as duas partes e pintá-las. O produto acabado deve ter o comprimento (definido pelo cilindro) e a espessura (definida pela esfera) dentro de certos limites, e isso só poderá ser verificado após a montagem. Para estudar a viabilidade de seu empreendimento, o empresário quer ter uma idéia da distribuição do lucro por peça montada.

Sabe-se que cada componente pode ser classificado como bom, longo ou curto, conforme sua medida esteja dentro da especificação, maior ou menor que a especificada, respectivamente. Além disso, foram obtidos dos fabricantes o preço de cada componente ($5,00) e as probabilidades de produção de cada componente com as características bom, longo e curto. Esses valores estão na Tabela 6.1.

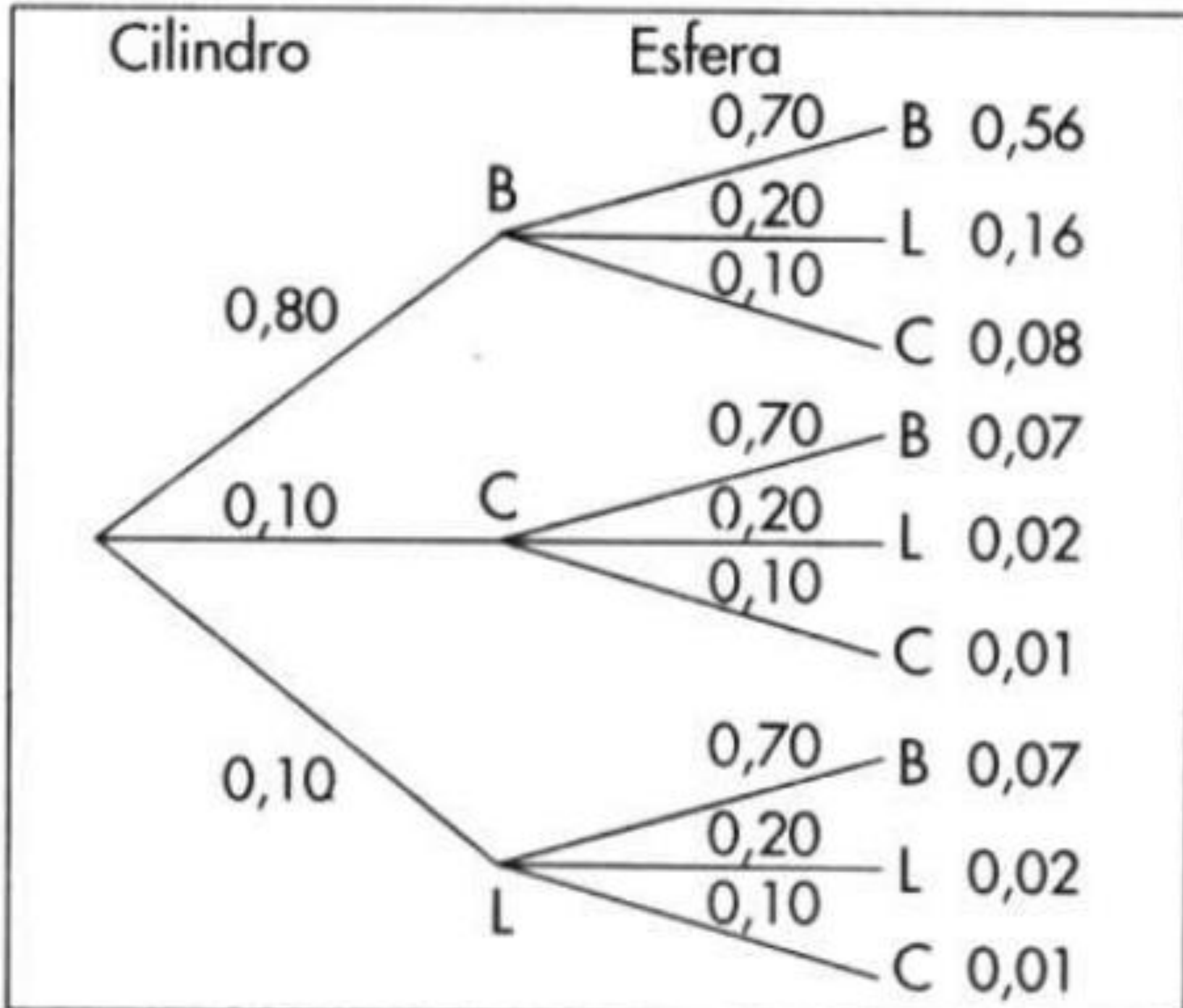
Se o produto final apresentar algum componente com a característica C (curto), ele será irrecuperável, e o conjunto será vendido como sucata ao preço de $5,00. Cada componente longo poderá ser recuperado a um custo adicional de $5,00. Se o preço de venda de cada unidade for de $25,00, como seria a distribuição de freqüências da variável *X*: lucro por conjunto montado?

Distribuição da produção das fábricas A e B, de acordo com as medidas das peças produzidas.

Produto		Fábrica A Cilindro	Fábrica B Esfera
Dentro das especificações	bom (B)	0,80	0,70
Maior que as especificações	longo (L)	0,10	0,20
Menor que as especificações	curto (C)	0,10	0,10

Tabela 6.1:

Diagrama em árvore para o exemplo



Distribuição de probabilidade das possíveis composições das montagens.

Produto	Probabilidade	Lucro por montagem (X)
BB	0,56	15
BL	0,16	10
BC	0,08	–5
LB	0,07	10
LL	0,02	5
LC	0,01	–5
CB	0,07	–5
CL	0,02	–5
CC	0,01	–5

Tabela 6.2

da Tabela 6.2, vemos que X pode assumir um dos seguintes valores:

15, se ocorrer o evento $A_1 = \{BB\}$;
10, se ocorrer o evento $A_2 = \{BL, LB\}$;
5, se ocorrer o evento $A_3 = \{LL\}$;
–5, se ocorrer o evento $A_4 = \{BC, LC, CB, CL, CC\}$.

Cada um desses eventos tem uma probabilidade associada

$$P(A_1) = 0{,}56, \quad P(A_2) = 0{,}23,$$
$$P(A_3) = 0{,}02, \quad P(A_4) = 0{,}19,$$

Lembre que :
P(A4)=P(BL)+P(LC)+P(CB)+P(CL)+P(CC) =
= 0.08+0.01+0.07+0.02+0.01 = 0.19

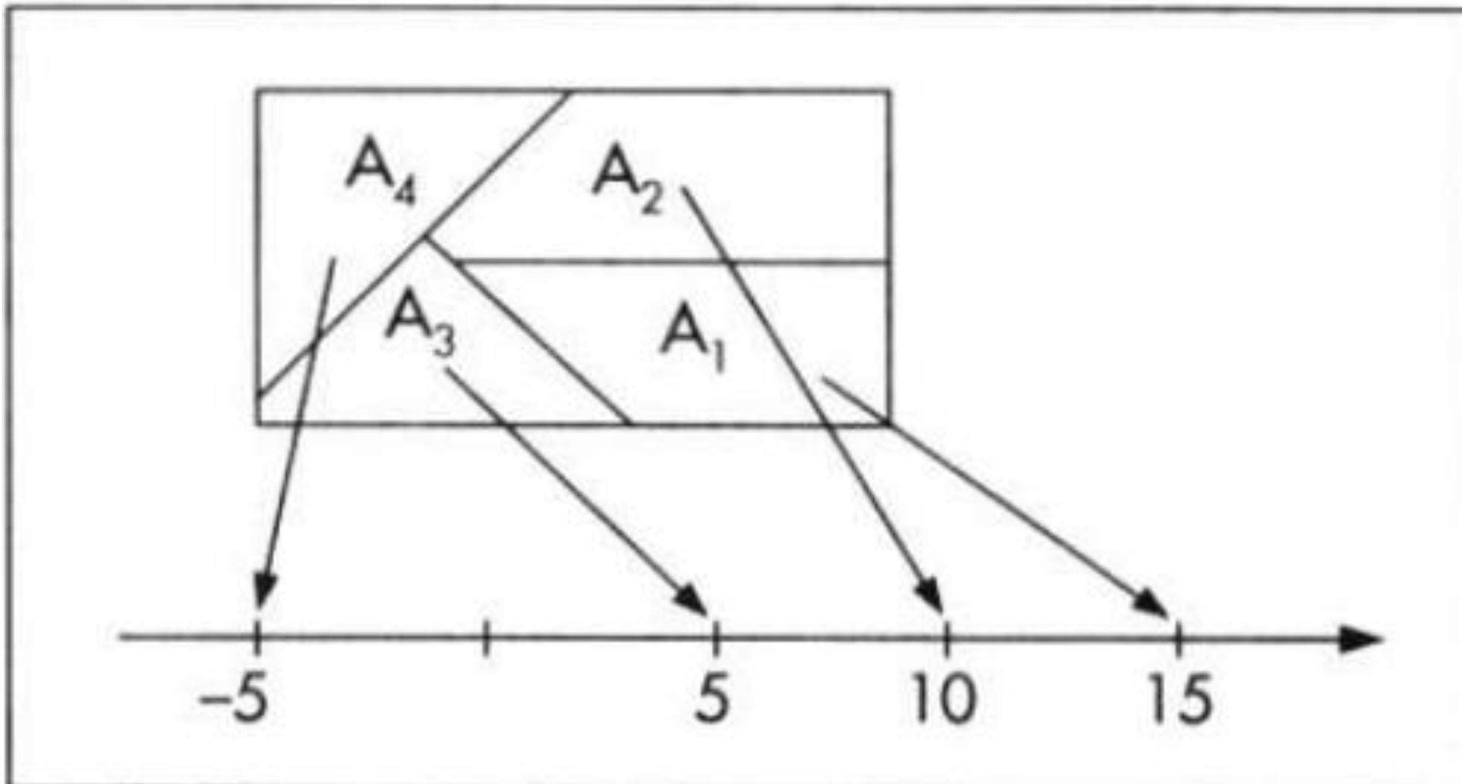
o que nos permite escrever a função $(x, p(x))$ da Tabela 6.3, que é um modelo teórico para a distribuição da variável X, que o empresário poderá usar para julgar a viabilidade econômica do projeto que ele pretende realizar. Aqui, x é o valor da v.a. X e $p(x)$ é a probabilidade de X tomar o valor x. Voltaremos a esse problema mais adiante.

Tabela 6.3: Distribuição da v.a. X.

x	$p(x)$
15	0,56
10	0,23
5	0,02
–5	0,19
Total	1,00

A função $(x, p(x))$ é chamada *função de probabilidade* da v.a. X.

Figura 6.2: Função de probabilidade da v.a. X = lucro por montagem.



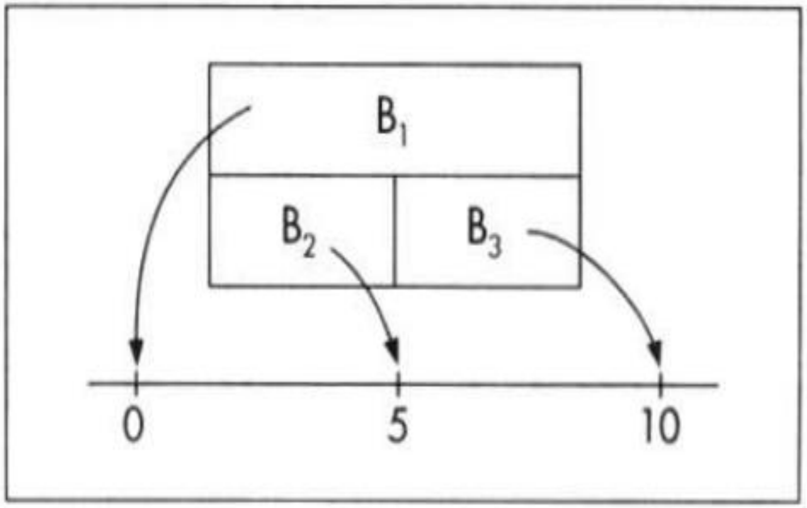
Se considerarmos Y como sendo a variável "custo de recuperação de cada conjunto produzido", verificaremos que Y irá assumir os valores

0, se ocorrer o evento $B_1 = \{BB, BC, LC, CB, CL, CC\}$
5, se ocorrer o evento $B_2 = \{BL, LB\}$;
10, se ocorrer o evento $B_3 = \{LL\}$.

Tabela 6.4: Distribuição da v.a. Y.

y	$p(y)$
0	0,75
5	0,23
10	0,02
Total	1,00

Figura 6.3: Função de probabilidade da v.a. Y = custo de recuperação.



Deduz-se do exposto que uma v.a. X, do tipo discreto, estará bem caracterizada se indicarmos os possíveis valores $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ que ela pode assumir e as respectivas probabilidades $p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n), ...,$ ou seja, se conhecermos a sua função de probabilidade $(x, p(x))$. Também usaremos a notação $p(x) = P(X = x)$.

Voltemos à situação do Exemplo 5.10, em que consideramos duas extrações, sem reposição, de uma urna contendo duas bolas brancas e três bolas vermelhas. Definamos a v.a. X: número de bolas vermelhas obtidas nas duas extrações. Obtemos a Tabela 6.5 e a Figura 6.4.

Figura 6.4: **Diagrama em árvore para o exemplo 6.3.**

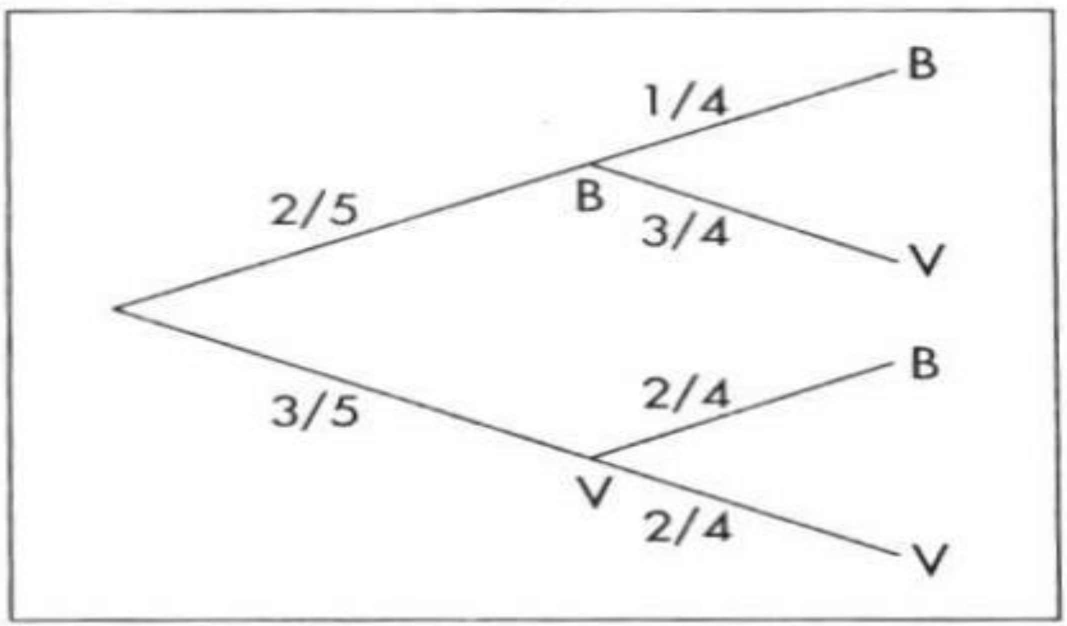


Tabela 6.5: Extrações sem reposição de urna com duas bolas brancas e três bolas vermelhas.

Resultados	Probabilidades	X
BB	1/10	0
BV	3/10	1
VB	3/10	1
VV	3/10	2

Fonte: Figura 6.4.

Vemos, pois, que a cada resultado do experimento está associado um valor da v.a. X, a saber, 0, 1 ou 2.

$$p(0) = P(X = 0) = P(BB) = 1/10,$$
$$p(1) = P(X = 1) = P(BV \text{ ou } VB) = 6/10,$$
$$p(2) = P(X = 2) = P(VV) = 3/10.$$

Tabela 6.6: Distribuição de probabilidades da v.a. X = número de bolas vermelhas.

x	$p(x)$
0	1/10
1	6/10
2	3/10

Fonte: Tabela 6.5.

Retomemos o Exemplo 5.3, em que consideramos o lançamento de uma moeda duas vezes. Definamos a v.a. Y: número de caras obtidas nos dois lançamentos. Temos, então:

Figura 6.5: Diagrama em árvore para o exemplo 6.4.

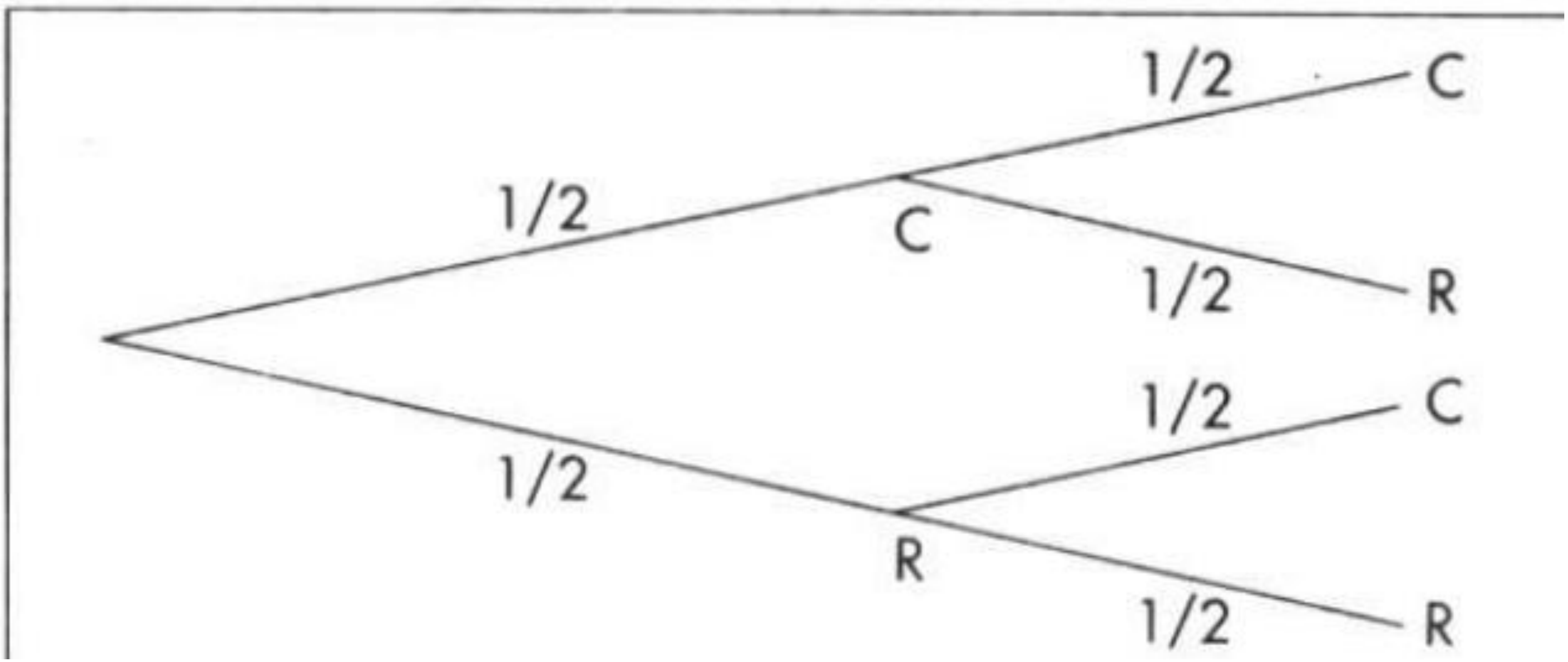


Tabela 6.7: Lançamento de duas moedas.

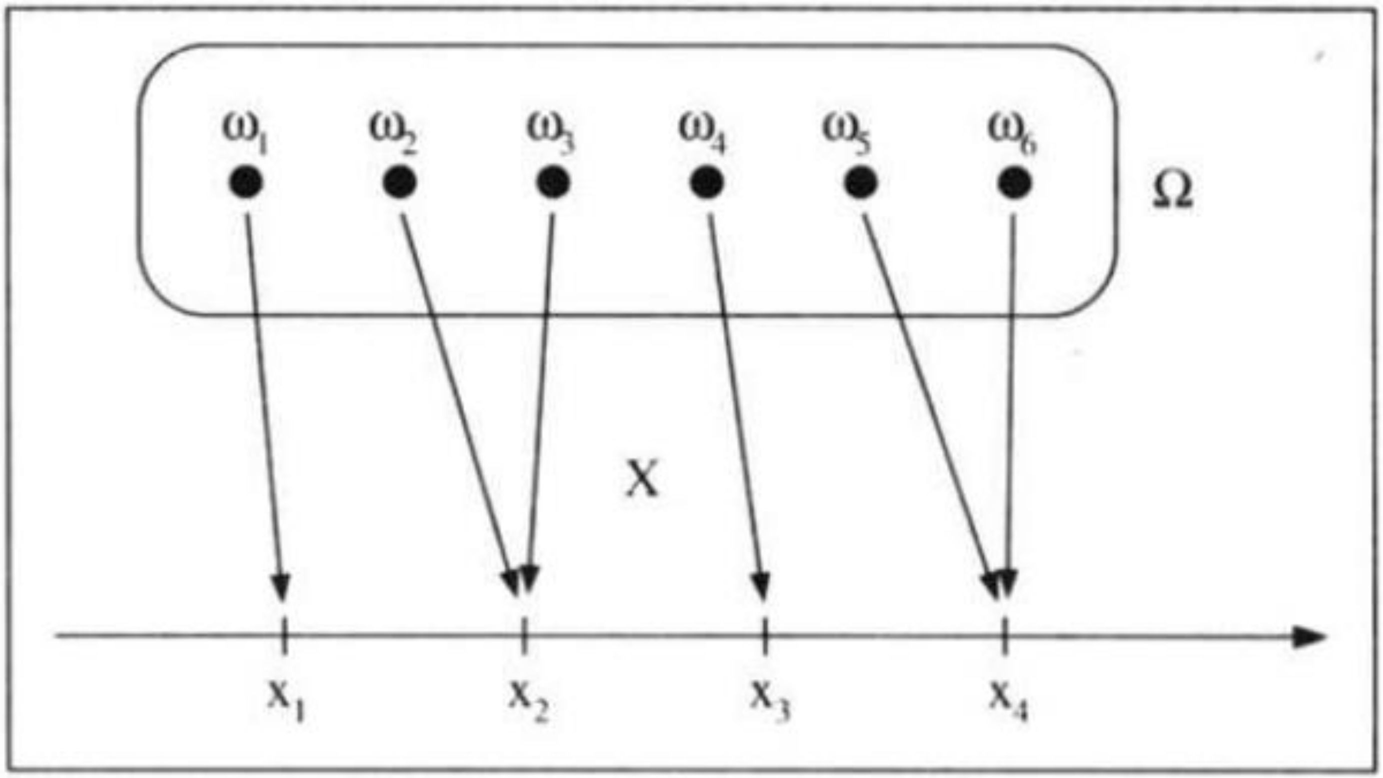
Resultados	Probabilidades	Y
CC	1/4	2
CR	1/4	1
RC	1/4	1
RR	1/4	0

Tabela 6.8: Distribuição da v.a. Y = número de caras

y	$p(y)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Definição. Uma função X, definida no espaço amostral Ω e com valores num conjunto enumerável de pontos da reta é dita uma variável aleatória discreta.

Figura 6.6: Definição de uma v.a.



Vimos, também, como associar a cada valor x_i da v.a. X sua probabilidade de ocorrência. Ela é dada pela probabilidade do evento A de Ω, cujos elementos correspondem ao valor x_i (veja Figuras 6.2 e 6.3). Matematicamente, podemos escrever

Vimos, também, como associar a cada valor x_i da v.a. X sua probabilidade de ocorrência. Ela é dada pela probabilidade do evento A de Ω, cujos elementos correspondem ao valor x_i (veja Figuras 6.2 e 6.3). Matematicamente, podemos escrever

$$P(X = x_i) = P(A), \quad A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} \subset \Omega$$

é tal que $X(\omega_i) = x_i$, se $\omega_i \in A$ e $X(\omega_i) \neq x_i$, se $\omega_i \in A^c$.

Definição. Chama-se função de probabilidade da v.a. discreta X, que assume os valores x_1, x_2, ..., x_n, ..., a função $\{(x_i, p(x_i)), i = 1, 2, \ldots\}$, que a cada valor de x_i associa a sua probabilidade de ocorrência, isto é,

$$p(x_i) = P(X = x_i) = p_i, \; i = 1, 2, \ldots$$

Valor Médio de uma Variável Aleatória

Uma pergunta que logo ocorreria ao empresário do exemplo 6.1 é qual o lucro médio por conjunto montado que ele espera conseguir. Da Tabela 6.3, observamos que 56% das montagens devem produzir um lucro de 15 reais, 23% um lucro de dez reais, e assim por diante. Logo, o lucro esperado por montagem será dado por

$$\text{lucro médio} = (0{,}56)(15) + (0{,}23)(10) + (0{,}02)(5) + (0{,}19)(-5) = 9{,}85$$

o empresário espera ter um lucro de 9,85 reais por conjunto montado.

Definição. Dada a v.a. X discreta, assumindo os valores $x_1, \ldots, x_n$, chamamos valor médio ou esperança matemática de X ao valor

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Definição. Chamamos de *variância* da v.a. X o valor

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p_i.$$

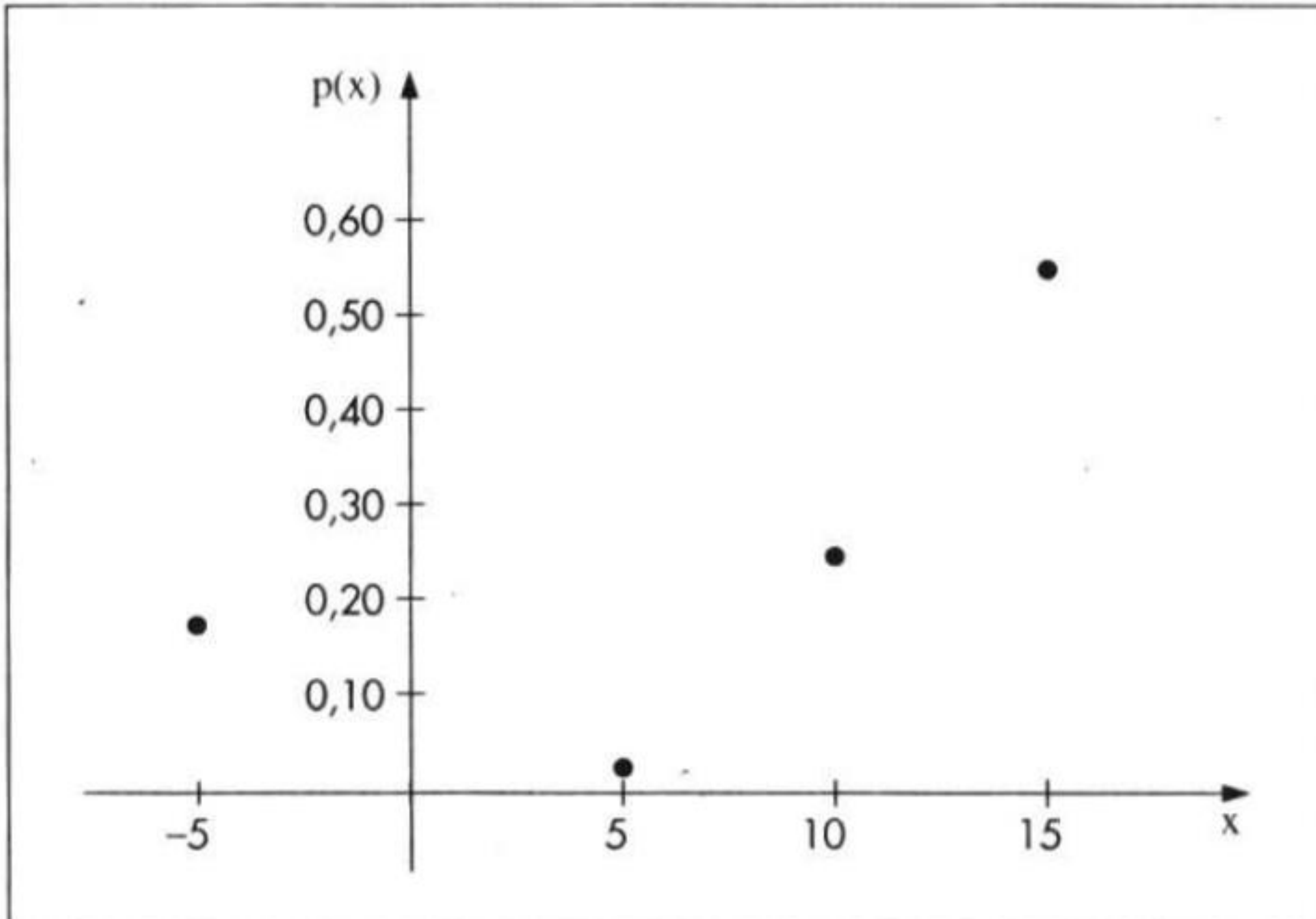
O desvio padrão de X, $\mathrm{DP}(X)$, é definido como a raiz quadrada positiva da variância.

Deixamos a cargo do leitor verificar que, no caso do problema do empresário,

(i) $\mathrm{Var}(X) = 57{,}23$;

(ii) $DP(X) = 7{,}57$;

Figura 6.7: Gráfico de $p(x)$: distribuição da v.a. X = lucro por montagem.



Observação. Até agora, consideramos o caso em que a v.a. X pode assumir um número *finito* de valores. Mas uma v.a. discreta X pode assumir um número *infinito*, porém *enumerável*, de valores, $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, com probabilidades $p_1, \ldots, p_n, \ldots$, tal que cada $p_i > 0$ e a soma de todos os p_i seja 1, ou seja, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Veja o problema 3. Nesse caso, a definição de esperança deve ser modificada. A soma na expressão (6.1) é uma "soma infinita", que temos de supor que seja "convergente".