

Algumas fórmulas importantes de álgebra

Potências

Se todas as bases são diferentes de zero:

$$u^m u^n = u^{m+n}$$

$$u^0 = 1$$

$$(uv)^m = u^m v^m$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)^m = \frac{u^m}{v^m}$$

$$\frac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$$

$$u^{-n} = \frac{1}{u^n}$$

$$(u^m)^n = u^{mn}$$

Radicais e expoentes racionais

Se todas as raízes são números reais:

$$\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v} \quad \sqrt[n]{\frac{u}{v}} = \frac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}} \quad (v \neq 0)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[mn]{u} \quad (\sqrt[n]{u})^m = u$$

$$\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m \quad \sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u| & n \text{ par} \\ u & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u} \quad u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m$$

$$u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}$$

Produtos notáveis e fatoração de polinômios

$$(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$$

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

$$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

$$(u + v)(u^2 - uv + v^2) = u^3 + v^3$$

$$(u - v)(u^2 + uv + v^2) = u^3 - v^3$$

Operação

$$1. \frac{u}{v} + \frac{w}{v} = \frac{u + w}{v}$$

$$2. \frac{u}{v} + \frac{w}{z} = \frac{uz + vw}{vz}$$

$$3. \frac{u}{v} \cdot \frac{w}{z} = \frac{uw}{vz}$$

$$4. \frac{u}{v} \div \frac{w}{z} = \frac{u}{v} \cdot \frac{z}{w} = \frac{uz}{vw}$$

5. Para subtração, substitua “+” por “-” em 1 e 2.

Domínio de uma expressão algébrica

Um quociente de duas expressões algébricas, além de ser outra expressão algébrica, é uma **expressão fracionária** ou simplesmente uma fração. Se o quociente pode ser escrito como a razão de dois polinômios, então a expressão fracionária é uma **expressão racional**. A seguir temos um exemplo de cada uma dessas expressões:

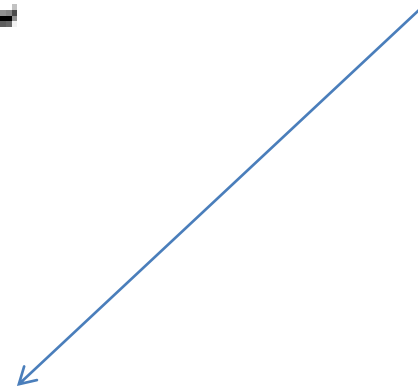
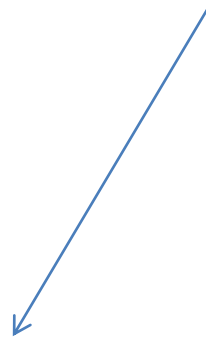
$$\frac{x^2 - 5x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{2x^3 - x^2 + 1}{5x^2 - x - 3}$$

$$\frac{2x^3 - x^2 + 1}{5x^2 - x - 3}$$

$$\frac{x}{x - 2}$$

$$\sqrt{x - 1}$$



Para quais valores de x (número real) podemos admitir a divisão?

Chamamos **domínio** da expressão algébrica o conjunto dos números reais para os quais a expressão algébrica é definida.

Simplificação de expressões racionais

$$\frac{uz}{vz} = \frac{u}{v}$$

Escreva $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ na forma reduzida.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} &= \frac{x(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)} \\ &= \frac{x}{x + 3}, \quad x \neq 3 \text{ e } x \neq -3\end{aligned}$$

Operações com expressões racionais

Duas frações são **iguais**, $\frac{u}{v} = \frac{z}{w}$ se, e somente se, $uw = vz$.

Operação

$$1. \frac{u}{v} + \frac{w}{v} = \frac{u+w}{v}$$

$$2. \frac{u}{v} + \frac{w}{z} = \frac{uz + vw}{vz}$$

$$3. \frac{u}{v} \cdot \frac{w}{z} = \frac{uw}{vz}$$

$$4. \frac{u}{v} \div \frac{w}{z} = \frac{u}{v} \cdot \frac{z}{w} = \frac{uz}{vw}$$

Exemplo

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{22}{15}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Multiplicação e divisão de expressões racionais

$$(a) \frac{(2x^2 + 11x - 21)}{(x^3 + 2x^2 + 4x)} \cdot \frac{(x^3 - 8)}{(x^2 + 5x - 14)}$$

$$= \frac{(2x - 3)\cancel{(x + 7)}}{x\cancel{(x^2 + 2x + 4)}} \cdot \frac{\cancel{(x - 2)}\cancel{(x^2 + 2x + 4)}}{\cancel{(x - 2)}\cancel{(x + 7)}} =$$

$$\frac{2x - 3}{x}, \quad x \neq 2, \quad x \neq -7, \quad x \neq 0$$

$$(b) \frac{(x^3 + 1)}{(x^2 - x - 2)} \div \frac{(x^2 - x + 1)}{(x^2 - 4x + 4)}$$

$$= \frac{(x^3 + 1)(x^2 - 4x + 4)}{(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 1)}$$

$$= \frac{\cancel{(x + 1)}\cancel{(x^2 - x + 1)}(x - 2)^2}{\cancel{(x + 1)}\cancel{(x - 2)}\cancel{(x^2 - x + 1)}}$$

$$= x - 2, \quad x \neq -1, \quad x \neq 2$$

Soma de expressões racionais

$$\begin{aligned} & \frac{x}{3x-2} + \frac{3}{x-5} = \\ & = \frac{x(x-5) + 3(3x-2)}{(3x-2)(x-5)} \\ & = \frac{x^2 - 5x + 9x - 6}{(3x-2)(x-5)} \\ & = \frac{x^2 + 4x - 6}{(3x-2)(x-5)} \end{aligned}$$

Redução ao mesmo denominador (mmc)

Escreva a seguinte expressão como uma fração na forma reduzida

$$\frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2 - 4}$$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2 - 4} &= \frac{2}{x(x - 2)} + \frac{1}{x} - \frac{3}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{2(x + 2)}{x(x - 2)(x + 2)} + \frac{(x - 2)(x + 2)}{x(x - 2)(x + 2)} - \frac{3x}{x(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{2(x + 2) + (x - 2)(x + 2) - 3x}{x(x - 2)(x + 2)} \dots = \frac{x - 1}{(x - 2)(x + 2)}, \end{aligned}$$

$$x \neq 0, x \neq -2 \text{ e } x \neq 2$$

Expressões racionais compostas

Simplificação de fração composta

$$\frac{3 - \frac{7}{x+2}}{1 - \frac{1}{x-3}} = \frac{\frac{3(x+2) - 7}{x+2}}{\frac{(x-3) - 1}{x-3}} = \frac{\frac{3x-1}{x+2}}{\frac{x-4}{x-3}}$$
$$= \frac{(3x-1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}, \quad x \neq 3, \quad x \neq -2 \text{ e } x \neq 4$$

Simplificação de outra fração composta

Use o mínimo múltiplo comum para simplificar a fração composta

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} &= \frac{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)a^2b^2}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)a^2b^2} = \frac{b^2 - a^2}{ab^2 - a^2b} \\ &= \frac{(b + a)(b - a)}{ab(b - a)} \\ &= \frac{b + a}{ab}, \quad a \neq b \end{aligned}$$