Algumas fórmulas importantes de álgebra

Potências

Se todas as bases são diferentes de zero:

$$u^m u^n = u^{m+n} \qquad \frac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$$

$$u^0 = 1 \qquad u^{-n} = \frac{1}{u^n}$$

$$(uv)^m = u^m v^m \qquad (u^m)^n = u^{mn}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)^m = \frac{u^m}{v^m}$$

Radicais e expoentes racionais

Se todas as raízes são números reais:

$$\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v} \qquad \sqrt[n]{\frac{u}{v}} = \frac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}} \ (v \neq 0)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[mn]{u} \qquad (\sqrt[n]{u})^n = u$$

$$\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m \qquad \sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u| & n \text{ par} \\ u & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u} \qquad u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m$$

$$u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}$$

Produtos notáveis e fatoração de polinômios

$$(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$$

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

$$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

$$(u + v)(u^2 - uv + v^2) = u^3 + v^3$$

$$(u - v)(u^2 + uv + v^2) = u^3 - v^3$$

Operação

1. $\dfrac{u}{v} + \dfrac{w}{v} = \dfrac{u + w}{v}$

2. $\dfrac{u}{v} + \dfrac{w}{z} = \dfrac{uz + vw}{vz}$

3. $\dfrac{u}{v} \cdot \dfrac{w}{z} = \dfrac{uw}{vz}$

4. $\dfrac{u}{v} \div \dfrac{w}{z} = \dfrac{u}{v} \cdot \dfrac{z}{w} = \dfrac{uz}{vw}$

5. Para subtração, substitua "+" por "−" em 1 e 2.

Domínio de uma expressão algébrica

Um quociente de duas expressões algébricas, além de ser outra expressão algébrica, é uma **expressão fracionária** ou simplesmente uma fração. Se o quociente pode ser escrito como a razão de dois polinômios, então a expressão fracionária é uma **expressão racional**. A seguir temos um exemplo de cada uma dessas expressões:

$$\frac{x^2 - 5x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \frac{2x^3 - x^2 + 1}{5x^2 - x - 3}$$

$$\frac{2x^3 - x^2 + 1}{5x^2 - x - 3} \qquad \frac{x}{x - 2} \qquad \sqrt{x - 1}$$

Para quais valores de x (número real) podemos admitir a divisão?

Chamamos **domínio** da expressão algébrica o conjunto dos números reais para os quais a expressão algébrica é definida.

Simplificação de expressões racionais

$$\frac{uz}{vz} = \frac{u}{v}$$

Escreva $\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ na forma reduzida.

SOLUÇÃO

$$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{x(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)}$$

$$= \frac{x}{x + 3}, \quad x \neq 3 \text{ e } x \neq -3$$

Operações com expressões racionais

Duas frações são **iguais**, $\frac{u}{v} = \frac{z}{w}$ se, e somente se, $uw = vz$.

Operação	**Exemplo**
1. $\frac{u}{v} + \frac{w}{v} = \frac{u + w}{v}$	$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2 + 5}{3} = \frac{7}{3}$
2. $\frac{u}{v} + \frac{w}{z} = \frac{uz + vw}{vz}$	$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{22}{15}$
3. $\frac{u}{v} \cdot \frac{w}{z} = \frac{uw}{vz}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$
4. $\frac{u}{v} \div \frac{w}{z} = \frac{u}{v} \cdot \frac{z}{w} = \frac{uz}{vw}$	$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

Multiplicação e divisão de expressões racionais

(a) $$\frac{(2x^2 + 11x - 21)}{(x^3 + 2x^2 + 4x)} \cdot \frac{(x^3 - 8)}{(x^2 + 5x - 14)}$$

$$= \frac{(2x - 3)\cancel{(x + 7)}}{x\cancel{(x^2 + 2x + 4)}} \cdot \frac{\cancel{(x - 2)}\cancel{(x^2 + 2x + 4)}}{\cancel{(x - 2)}\cancel{(x + 7)}} =$$

$$\frac{2x - 3}{x}, \quad x \neq 2, \quad x \neq -7, \quad x \neq 0$$

(b) $$\frac{(x^3 + 1)}{(x^2 - x - 2)} \div \frac{(x^2 - x + 1)}{(x^2 - 4x + 4)}$$

$$= \frac{(x^3 + 1)(x^2 - 4x + 4)}{(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 1)}$$

$$= \frac{\cancel{(x + 1)}\cancel{(x^2 - x + 1)}(x - 2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x + 1)}\cancel{(x - 2)}\cancel{(x^2 - x + 1)}}$$

$$= x - 2, \quad x \neq -1, \quad x \neq 2$$

Soma de expressões racionais

$$\frac{x}{3x-2} + \frac{3}{x-5} =$$

$$= \frac{x(x-5) + 3(3x-2)}{(3x-2)(x-5)}$$

$$= \frac{x^2 - 5x + 9x - 6}{(3x-2)(x-5)}$$

$$= \frac{x^2 + 4x - 6}{(3x-2)(x-5)}$$

Redução ao mesmo denominador (mmc)

Escreva a seguinte expressão como uma fração na forma reduzida

$$\frac{2}{x^2-2x}+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2-4}$$

SOLUÇÃO

$$\frac{2}{x^2-2x}+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2-4}=\frac{2}{x(x-2)}+\frac{1}{x}-\frac{3}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{2(x+2)}{x(x-2)(x+2)}+\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)}-\frac{3x}{x(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{2(x+2)+(x-2)(x+2)-3x}{x(x-2)(x+2)} \quad \cdots = \frac{x-1}{(x-2)(x+2)},$$

$$x \neq 0,\ \ x \neq -2 \text{ e } x \neq 2$$

Expressões racionais compostas

Simplificação de fração composta

$$\frac{3-\dfrac{7}{x+2}}{1-\dfrac{1}{x-3}}=\frac{\dfrac{3(x+2)-7}{x+2}}{\dfrac{(x-3)-1}{x-3}}=\frac{\dfrac{3x-1}{x+2}}{\dfrac{x-4}{x-3}}$$

$$=\frac{(3x-1)(x-3)}{(x+2)(x-4)},\quad x\neq 3,\ x\neq -2 \text{ e } x\neq 4$$

Simplificação de outra fração composta

Use o mínimo múltiplo comum para simplificar a fração composta

$$\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)a^2b^2}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)a^2b^2} = \frac{b^2 - a^2}{ab^2 - a^2b}$$

$$= \frac{(b+a)(b-a)}{ab(b-a)}$$

$$= \frac{b+a}{ab}, \quad a \neq b$$