Consequência Lógica

Quando podemos dizer que uma fórmula é consequência de outra fórmula ou de um conjunto de fórmulas?

Resposta:

No caso da lógica proposicional clássica, a resposta é dada em termos de valorações **(Linhas da Tabela Verdade)**

Definição 1:

Dizemos que uma fórmula ***B é consequência lógica de outra fórmula A***, se quando a fórmula **A tiver valor de verdade V** a fórmula **B também possui o valor de verdade V**.

Representação:

$$A \models B.$$

Exemplo : Verifique se $(p \vee q) \rightarrow r \models p \rightarrow r$.

Solução: Vide ***linhas 1, 3, 5, 7 e 8*** .

linha	p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
1	V	V	V	V	V	V
2	V	V	F	V	F	F
3	V	F	V	V	V	V
4	V	F	F	V	F	F
5	F	V	V	V	V	V
6	F	V	F	V	F	V
7	F	F	V	F	V	V
8	F	F	F	F	V	V

Exemplo : Verifique se $(p \wedge q) \rightarrow r \models p \rightarrow r$.

Solução: Pela ***linha 4 não é verdade que*** $(p \wedge q) \rightarrow r \models p \rightarrow r$

linha	p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
1	V	V	V	V	V	V
2	V	V	F	V	F	F
3	V	F	V	F	V	V
4	V	F	F	F	V	F
5	F	V	V	F	V	V
6	F	V	F	F	V	V
7	F	F	V	F	V	V
8	F	F	F	F	V	V

Além da consequência lógica entre duas fórmulas, podemos estudar **quando uma fórmula A é consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ** (Γ também pode ser chamado de teoria).

Uma fórmula A é consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ, **representado por $\Gamma \models$ A**, *se quando todas as fórmulas de Γ tiverem valor V a fórmula A também possui valor V***.**

Se $\Gamma=\{\alpha, \beta, \gamma, \theta\}$, no lugar de $\Gamma \models$ **A**, é usual representarmos por

$$\alpha, \beta, \gamma, \theta \models \mathbf{A}.$$

Note que se $\Gamma=\varnothing$ representamos $\Gamma \models A$ por $\models A$.

Neste caso, $\models A$ significa que A é uma tautologia ou uma fórmula válida.

Exemplo 4: Verificar a validade da regra lógica conhecida como *modus ponens* : $p, p \to q \models q$.

p	**q**	**p→q**
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A única linha em que **simultaneamente** **p** e **p→q** possuem **valor V** é a primeira, e neste caso temos também que **q** possui **valor V**.

Qual a relação entre a consequência lógica ($\models$) e o conectivo booleano ($\rightarrow$) ?

Teorema da Dedução

Sejam Γ um conjunto de fórmulas e A e B fórmulas. Então,

$$\boldsymbol{\Gamma, A \models B \text{ se, e somente se, } \Gamma \models A \rightarrow B.}$$

Assim,

$$A \equiv B \text{ se } A \models B \text{ e } B \models A.$$

De fato,

$A \models B$ implica $\models A \to B$, isto é, $A \to B$ é tautologia,

$B \models A$ implica $\models B \to A$, isto é, $B \to A$ é tautologia.

Logo, $(A \to B) \wedge (B \to A)$ é uma tautologia.

Lembre que, $(A \to B) \wedge (B \to A) \equiv A \leftrightarrow B$ e daí, $A \equiv B$.