Caracterização de Conjuntos

Definição de Conjunto → Caracterização intuitiva

O que é claro:
conjuntos são formados de objetos , designados de **elementos**

Coleção de objetos (agregado, totalidade)

Imprecisão : os objetos não precisam de alguma forma estarem fisicamente proximos ou terem alguma coisa em comum

Elementos de um conjunto

* Para indicar que um objeto é elemento de um conjunto utilizaremos o símbolo $\in$.

Assim se a letra **F** designa o conjunto dos filósofos, e a letra **s** denota Sócrates, podemos representar a sentença *"Sócrates é um filósofo"* da seguinte forma: $s \in F$.

No caso negativo, a sentença *"Sócrates não é um filósofo"* é representado por $s \notin F$.

Como representamos conjuntos?

Enumeração:

{ Pedro, Paulo, José}, {0,1,2,3,...}, {0,2,4,6,...}, {x,y,9,A,D,&}.

A enumeração dos elementos pode ser feita com ou sem lei de formação reconhecida.

Descrição:

{x: x é estudante do IFPR}, $\{x \in \Re: x<2\}$, $\{x \in \Re$:x é primo}, {x: P(x)}.

Descrição do conjunto por meio de uma propriedade.

Expressar em símbolos:

(a) b é um elemento de A

(b) k não é um elemento de B

(c) o conjunto consistindo nos elementos a, b e c

(d) b é um elemento do conjunto consistindo nos elementos a, b e c

(e) o conjunto $\{b\}$ é um elemento do conjunto consistindo nos elementos a, c, e no conjunto $\{b\}$

Conjunto especial

{x: x é diferente de si mesmo}, { x: x é carioca e paulista}

Estes conjuntos não tem elementos são chamados de conjuntos vazios.

Notação: $\emptyset$ ou { }

Conjunto Universo?

Obs: $\{x : x \notin x\}$ existe este conjunto ?

Quando falamos do *conjunto universo* queremos indicar apenas o conjunto das entidades que nos interessa estudar em um certo momento: *o universo de discurso de uma certa situação.*

Ex.: ***{x: x é par}, refere-se ao conjunto dos números naturais.***

Chamamos de conjunto unitário os conjuntos que possuem apenas um elemento.

Exemplo: {a}, {x}, {Paulo}.

Há alguma diferença entre Pedro e {Pedro}? E entre os conjuntos $\varnothing$ e $\{\varnothing\}$?

Podemos afirmar que há apenas um conjunto vazio?

O <u>Princípio da Extensionalidade</u> diz que:

Se temos dois conjuntos A e B, com exatamente os mesmos elementos, então se trata do mesmo conjunto, e não de conjuntos diferentes (ou seja A=B).

Em outras palavras, para um conjunto A ser diferente de um conjunto B, é preciso que haja pelo menos um elemento de A que não esteja em B, ou vice-versa.

Relação entre Conjuntos

O princípio de extensionalidade nos permite definir uma relação entre conjuntos: *a relação de inclusão*.

"Se cada elemento de um conjunto A for também elemento de um conjunto de B, dizemos que A está contido em B, ou que A é um subconjunto de B."

Notação: $A \subseteq B$.

$A \subset B$ se, e somente se, $A \subseteq B$ e $A \neq B$.

Neste caso A é subconjunto próprio de B ou que A está propriamente contido em B.

Note que: $A=B$ se, e somente se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Proposição: Sejam A, B e C conjuntos quaisquer:

(a) $\emptyset \subseteq A$;

(b) $A \subseteq A$;

(c) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$;

(d) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A=B$;

(e) Se $A \subset B$ então $A \neq B$.

Operações sobre conjuntos

Conjunto união de A e B (notação $A \cup B$):

$$A \cup B =_{def} \{x : x \in A \ \ ou \ \ x \in B\}$$

o conjunto $A \cup B$ contem todos os elementos que são ou elementos de A ou elementos de B.

Conjunto interseção de A e B (notação $A \cap B$):

$$A \cap B =_{def} \{x : x \in A \ \ \text{e} \ \ x \in B\}$$

o conjunto $A \cap B$ contem todos os elementos que são elementos de A e elementos de B.

Conjunto complemento A (notação $\overline{A}$): Dado um conjunto universo U e um conjunto A

$$\overline{A} =_{def} \{x : x \in U \text{ e } x \notin A\}$$

o conjunto $\overline{A}$ contem todos os elementos que são elementos de U e não são elementos A.

Conjunto diferença A e B (notação $A - B$):

$$A - B =_{def} \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

o conjunto $A - B$ contem todos os elementos que são elementos de A e não são elementos B.

Conjunto potência de A ou conjunto das partes de A (notação $\wp(A)$):

$$\wp(A) =_{def} \{X : X \subseteq A\}$$

o conjunto $\wp(A)$ contem todos subconjuntos de A.

Exemplo: Sejam os conjuntos A={1,2,3}, B={2,3,4,5}, C={1,2,a,b}, U={1,2,3,4,5,a,b}.

A $\cup$ B={1,2,3,4,5} , A $\cap$ B={2,3} , A $-$ B={1} , $\overline{B} = \{1, a, b\}$

$\wp(A)$={ $\emptyset$, {1}, {2}, {3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3} }

Exercício 4.5 Quais das seguintes afirmações são verdadeiras, e quais são falsas?

(a) $c \in \{a, c, e\}$

(b) $e \notin \{a, b, c\}$

(c) $\{0, 1, 2\} \subset \{0, 1, 2\}$

(d) $\{0, 1, 2\} \subseteq \{0, 1, 2\}$

(e) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$

(f) $a \in \{b, \{a\}\}$

(g) $\{a\} \in \{b, \{a\}\}$

(h) $\{a\} \in \{c, \{b\}, a\}$

(i) $c \in \{a, b\} \cup \{d, c, e\}$

(j) $\varnothing \subseteq \{a, b, c\}$

(k) $\{0, 1, 2\} \subset \{3, 2, 5, 4, 6\}$

(l) $\{1, b\} \subseteq \{1, b, c\} \cap \{4, d, 1, f, b\}$

Produto cartesiano

Produto cartesiano de dois conjuntos A e B (notação AxB)

$AxB =_{def} \{\ (x,y) : x \in A \ \ e \ \ y \in B\ \}.$

$$Exemplo : A = \{1,2\}, B = \{a,b\}.$$

$$AxB = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$$

Exemplo:

Um professor de Língua Portuguesa sugeriu em uma sala de aula a leitura dos livros *Helena*, de Machado de Assis, e *Iracema*, de José de Alencar. Vinte alunos leram *Helena*, 15 leram só *Iracema*, 10 leram os dois livros e 15 não leram nenhum deles.

a) Quantos alunos leram *Iracema*?

b) Quantos alunos leram só *Helena*?

c) Qual é o número de alunos nessa sala?

Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

"Deus criou os números naturais. O resto é obra dos homens."

Leopold Kronecker

O conjunto dos números naturais é representado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$$

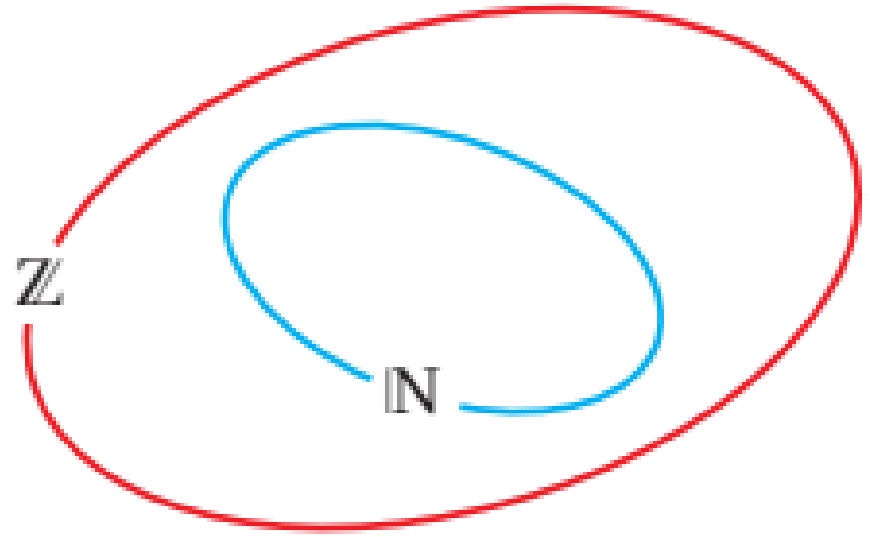
Um **subconjunto** importante de $\mathbb{N}$ é o conjunto $\mathbb{N}^*$, obtido excluindo o zero de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Veja a representação no diagrama.



$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ ou $\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

são números racionais:

$$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{3} \text{ e } 2$$

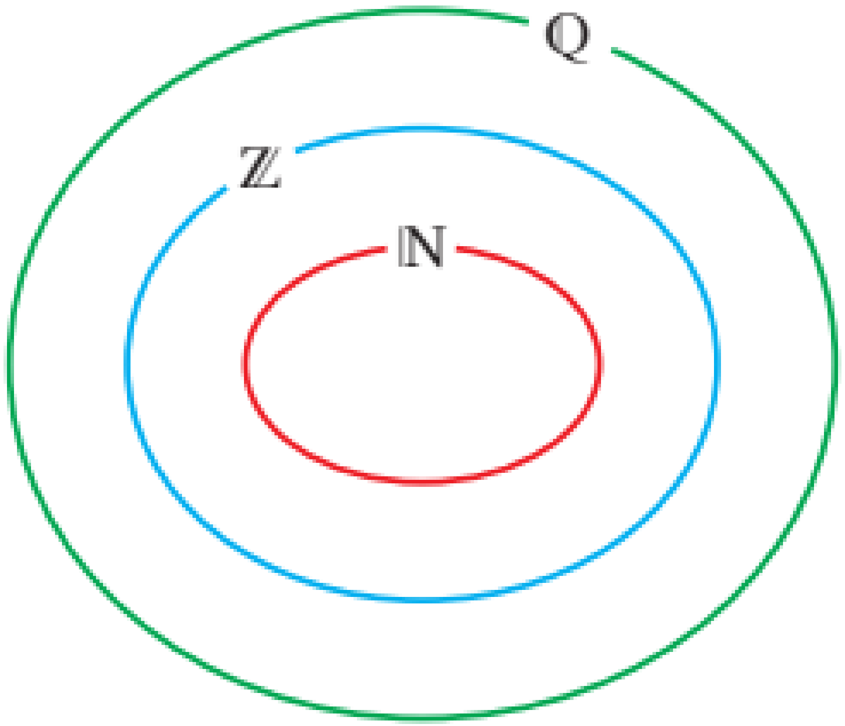
Simbolicamente, indicamos assim:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, \text{com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

lê-se “tal que”

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, temos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$



Números irracionais

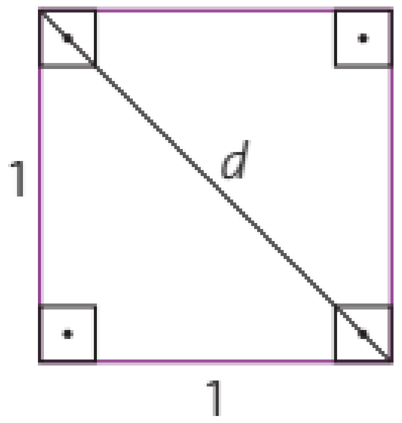
Ao medir a diagonal de um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento chegamos a um número que **não** é racional. Acompanhe:

Usando a relação de Pitágoras:

$d^2 = 1^2 + 1^2$

$d^2 = 2$

$d = \sqrt{2}$

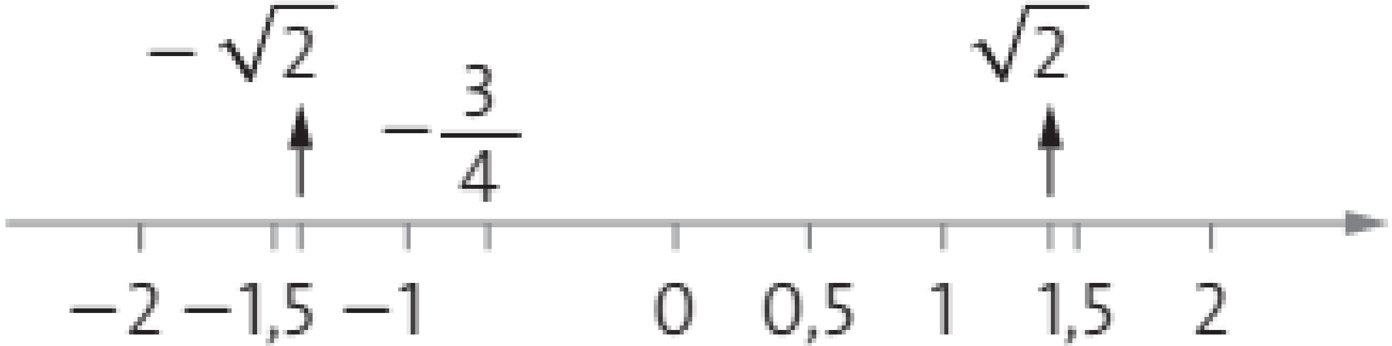


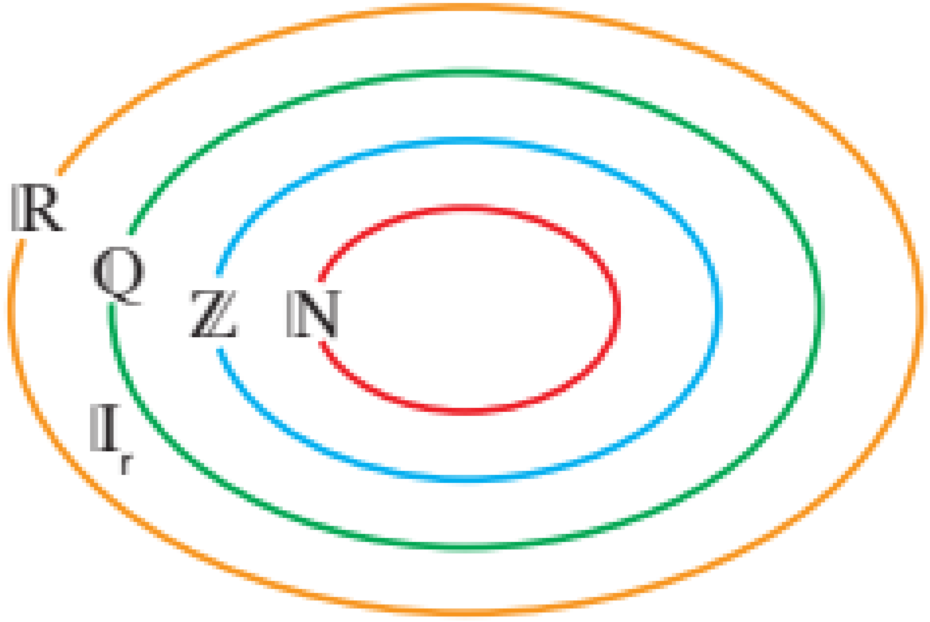
A pergunta é: que número, elevado ao quadrado, resulta em 2?

fazendo **aproximações sucessivas**.

$\sqrt{2}$ está entre 1,414 e 1,415

Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)





$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Tabela 1-1 Leis da álgebra de conjuntos

Leis de idempotência	
(1a) $A \cup A = A$	(1b) $A \cap A = A$
Leis de associatividade	
(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leis de comutatividade	
(3a) $A \cup B = B \cup A$	(3b) $A \cap B = B \cap A$
Leis de distributividade	
(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leis de identidade	
(5a) $A \cup \varnothing = A$	(5b) $A \cap U = A$
(6a) $A \cup U = U$	(6b) $A \cap \varnothing = \varnothing$
Leis de involução	
(7) $(A^c)^c = A$	
Leis dos complementares[†]	
(8a) $A \cup A^c = U$	(8b) $A \cap A^c = \varnothing$
(9a) $U^c = \varnothing$	(9b) $\varnothing^c = U$
Leis de DeMorgan	
(10a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	(10b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$