FORMAS NORMAIS CONJUNTIVA E DISJUNTIVA

1. Uma fórmula é normal conjuntiva (FNC) se, e somente se:

a) no máximo contem os conectivos $\sim$, $\vee$ e $\wedge$;

b) $\sim$ somente tem alcance sobre as letras proposicionais;

c) não aparecem sinais de negação sucessivos como $\sim\sim$;

d) $\vee$ não tem alcance sobre $\wedge$, isto é, não há expressões do tipo $p \vee (q \wedge r)$.

Exemplos:

$(\sim p \vee q) \wedge (r \vee s \vee p)$, $\sim p \vee q$, $\sim q$

1. Uma fórmula é normal disjuntiva (FND) se, e somente se:

a) no máximo contem os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$;

b) $\sim$ somente tem alcance sobre as letras proposicionais;

c) não aparecem sinais de negação sucessivos como $\sim\sim$;

d) $\wedge$ não tem alcance sobre $\vee$, isto é, não há expressões do tipo $p \wedge (q \vee r)$.

Exemplos:

$p \vee (q \wedge r) \vee (\sim q \wedge p)$, $\sim p \wedge q$, $\sim q$, $\sim p \vee q$

PROBLEMA DE POST

A partir dos valores dados as variáveis proposicionais e os valores de uma fórmula composta com estas variáveis proposicionais (tabela verdade) queremos determinar a fórmula que satisfaça a tabela.

p	q	?
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Resolução pela Forma Normal Conjuntiva

p_1	p_2	p_3	. . .	p_{n-1}	p_n	?
V	V	V	. . .	V	V	x_1
V	V	V	. . .	V	F	x_2
V	V	V	. . .	F	V	x_3
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
F	F	F	. . .	F	V	x_{2^n-1}
F	F	F	. . .	F	F	x_{2^n}

Tomemos as conjunções

$$C_1 : \quad p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge. . .\wedge \; p_{n-1} \wedge \; p_n$$

$$C_2 : \; p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge. . .\wedge \; p_{n-1} \wedge \; {\sim}p_n$$

$$C_3 : \; p_1 \wedge p_2 \wedge p3 \wedge. . .\wedge \sim p_{n-1} \wedge \; p_n$$

....

$$C_2n-1 : \; {\sim}p_1 \wedge {\sim}p_2 \wedge {\sim}p_3 \wedge. . .\wedge \; {\sim}p_{n-1} \wedge \; p_n$$

$$C_2n : \; {\sim}p_1 \wedge {\sim}p_2 \wedge {\sim}p_3 \wedge. . .\wedge \; {\sim}p_{n-1} \wedge \; {\sim}p_n$$

C_1 tem somente V na primeira linha e F nas demais

C_2 tem somente V na segunda linha e F nas demais

C_3 tem somente V na terceira linha e F nas demais

..

C_2n tem somente V na última linha e F nas demais

$\sim C_1$ tem somente F na primeira linha e V nas demais

$\sim C_2$ tem somente F na segunda linha e V nas demais

$\sim C_3$ tem somente F na terceira linha e V nas demais

……………………………………………………………………

$\sim C_2n$ tem somente F na 2^n - ésima linha e F nas demais

Em geral $\sim C_k$ tem somente F na k-ésima linha e V nas demais

Portanto,

$\sim C_k \wedge \sim C_m \wedge \sim C_r$ tem F na k-ésima, m-ésima e r-ésima e V nas demais

Exemplo:

p	q	r	?
v	v	v	v
v	v	f	v
v	f	v	f
v	f	f	f
f	v	v	f
f	v	f	v
f	f	v	v
f	f	f	f

Tomando-se as linhas 3, 4, 5, 8 que tem F temos a solução:

$$\sim c_3 \wedge \sim c_4 \wedge \sim c_5 \wedge \sim c_8$$

$\sim(p \wedge \sim q \wedge r) \wedge \sim(p \wedge \sim q \wedge \sim r) \wedge \sim(\sim p \wedge q \wedge r) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$, que na sua forma normal conjuntiva é dada por:

$$(\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

Resolução pela Forma Normal Disjuntiva

p_1	p_2	p_3	. . .	p_{n-1}	p_n	?
V	V	V	. . .	V	V	x_1
V	V	V	. . .	V	F	x_2
V	V	V	. . .	F	V	x_3
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
F	F	F	. . .	F	V	x_{2^n-1}
F	F	F	. . .	F	F	x_{2^n}

Em geral C_k tem somente V na k-ésima linha e F nas demais

Portanto,

$C_k \vee C_m \vee C_r$ tem V na k-ésima, m-ésima e r-ésima e F nas demais

Exemplo:

p	q	?
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A resposta é $c_3 \vee c_4$, isto é, $(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

Teorema: Para toda fórmula B da Lógica Proposicional Clássica, existe uma fórmula A na FNC que é equivalente a B, $A \equiv B$.

Dem.: (Transformação na FNC sem novos átomos)

Entrada: Uma fórmula B

Saída: Uma Fórmula A na FNC, $A \equiv B$.

1. **Para todas** as subfórmulas X, Y, Z de B **faça**

2. Redefinir $\rightarrow$ em termos de $\vee$ e ~

3. Empurrar as negações para o interior por meio das Leis de De Morgan

4.Eliminação da Dupla Negação

5. Distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$

6: **fim para**

7. A fórmula A é obtida quando não há mais substituições possíveis.

Teorema: Para toda fórmula B da Lógica Proposicional Clássica, existe uma fórmula A na FND que é equivalente a B, $A \equiv B$.

Dem.: (Transformação na FND sem novos átomos)

Entrada: Uma fórmula B

Saída: Uma Fórmula A na FNC, $A \equiv B$.

1. **Para todas** as subfórmulas X, Y, Z de B **faça**

2. Redefinir $\rightarrow$ em termos de $\vee$ e ~

3. Empurrar as negações para o interior por meio das Leis de De Morgan

4.Eliminação da Dupla Negação

5. Distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$

6: **fim para**

7. A fórmula A é obtida quando não há mais substituições possíveis.