SUBESPAÇOS VETORIAIS

Definição

Um subconjunto W de um espaço vetorial V é chamado um ***subespaço vetorial*** de V se W é um espaço vetorial em relação às operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V.

Teorema 5.2.1

Se W é um conjunto de um ou mais vetores de um espaço vetorial V, então W é um subespaço de V se, e somente se, valem as seguintes condições.

(*a*) *Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores em W, então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está em W.*
(*b*) *Se l é um escalar qualquer e $\mathbf{u}$ é um vetor qualquer em W, então $l\,\mathbf{u}$ está em W.*

Qualquer espaço vetorial não-nulo V tem pelo menos dois subespaços: o próprio V é um subespaço e o conjunto $\{\mathbf{0}\}$ consistindo apenas do vetor nulo de V é um subespaço, chamado ***subespaço nulo***. Combinando isto com os Exemplos 1 e 2, nós obtemos a seguinte lista de subespaços de R^2 e R^3:

Subespaços de R^2

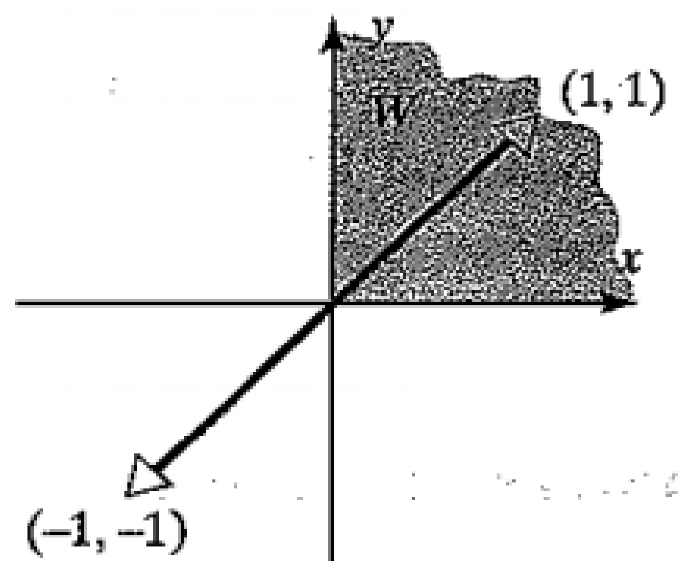
- $\{\mathbf{0}\}$
- Retas pela origem
- R^2

Subespaços de R^3

- $\{\mathbf{0}\}$
- Retas pela origem
- Planos pela origem
- R^3

EXEMPLO 3 Um Subconjunto de R^2 que não é Subespaço

Seja W o conjunto de todos os pontos (x, y) em R^2 tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Estes são os pontos do primeiro quadrante. O conjunto W *não* é um subespaço de R^2 pois não é fechado na multiplicação por escalar. Por exemplo, $\mathbf{v} = (1, 1)$ está em W mas seu negativo $(-1)\,\mathbf{v} = -\mathbf{v} = (-1, -1)$ não está (Figura 5.2.3). ◆



Seja n um inteiro não-negativo e suponha que W consiste de todas as funções que podem ser expressas na forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad (1)$$

onde $a_0, \ldots, a_n$ são números reais. Assim, W consiste de todos os polinômios de grau n ou menor. O conjunto W é um subespaço do espaço vetorial de todas as funções reais discutido no Exemplo 4 da seção precedente. Para ver isto, sejam $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ os polinômios

$$\boxed{p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \text{e} \quad q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}$$

Então

$$\boxed{(\mathbf{p} + \mathbf{q})(x) = p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n}$$

e

$$\boxed{(k\mathbf{p})(x) = kp(x) = (ka_0) + (ka_1)x + \cdots + (ka_n)x^n}$$

Estas funções têm a forma dada em (1), de modo que $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ e $k\mathbf{p}$ estão em W. O espaço vetorial W deste exemplo será denotado pelo símbolo P_n. ◆

Subespaços das Funções Contínuas em $(-\infty, \infty)$

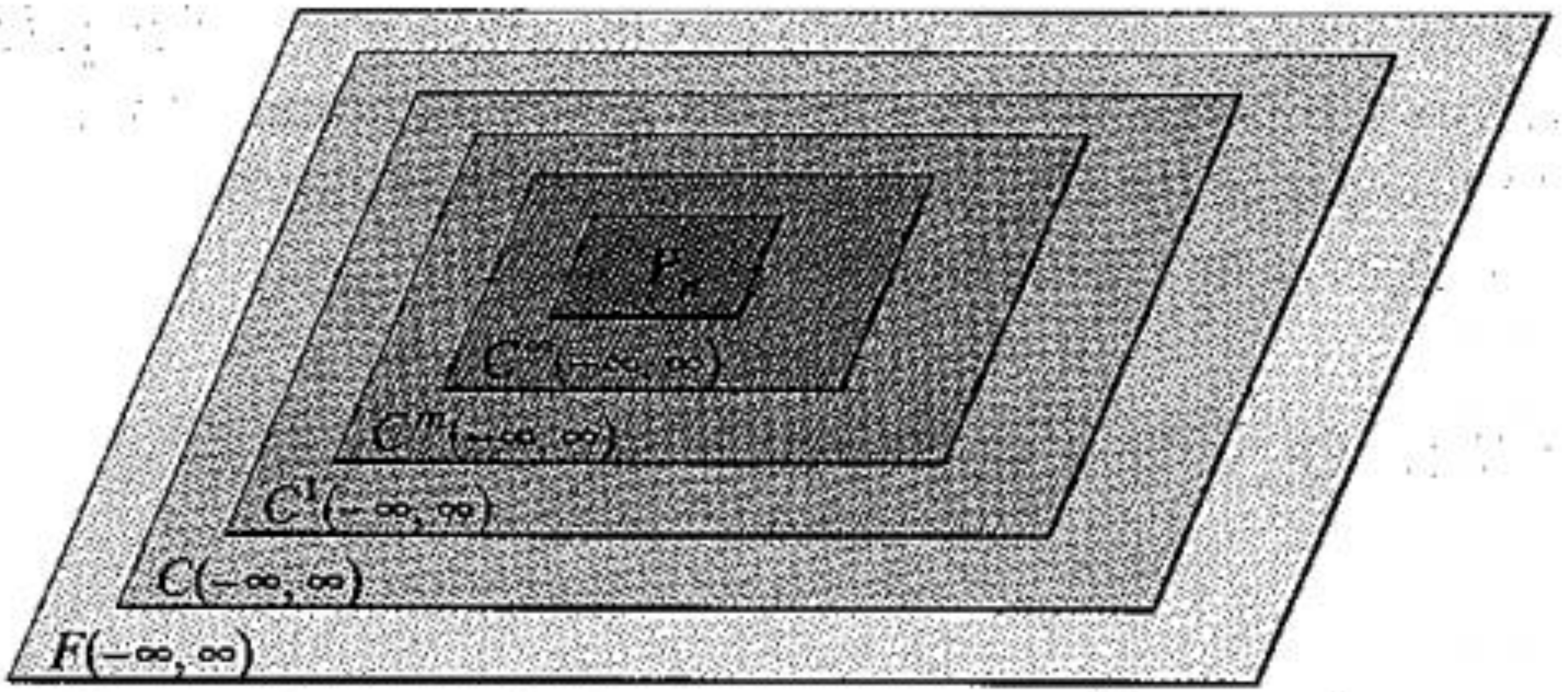


Figura 5.2.4

Teorema 5.2.2

Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é um sistema linear homogêneo de m equações em n incógnitas, então o conjunto dos vetores-solução é um subespaço de* R^n.

que se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ são quaisquer vetores-solução e se k é um escalar qualquer, então $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$ e $k\mathbf{x}$ também são vetores-solução. Mas se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ são vetores-solução então

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad A\,\mathbf{x}' = \mathbf{0}$$

e portanto

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = A\mathbf{x} + A\mathbf{x}' = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

e

$$A(k\mathbf{x}) = kA\mathbf{x} = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

o que prova que $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$ e $k\mathbf{x}$ são vetores-solução. ■

Definição

Dizemos que um vetor $\mathbf{w}$ é uma combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ se $\mathbf{w}$ pode ser escrito na forma

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$$

onde $k_1, k_2, \ldots, k_r$ são escalares.

Teorema 5.2.3

Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ são vetores em um espaço vetorial V, então:

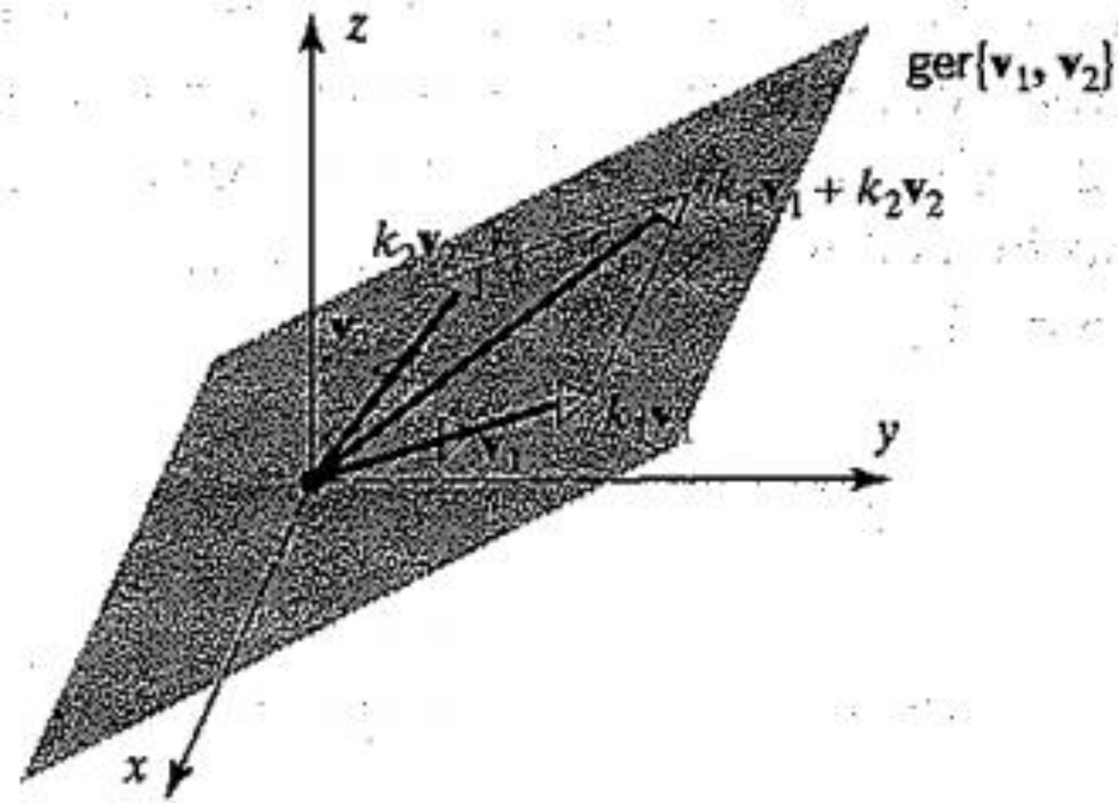
(*a*) *O conjunto W de todos as combinações lineares de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ é um subespaço de V.*

(*b*) *W é o menor subespaço de V que contém $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, no seguinte sentido: qualquer subespaço de V que contém $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ também contém W.*

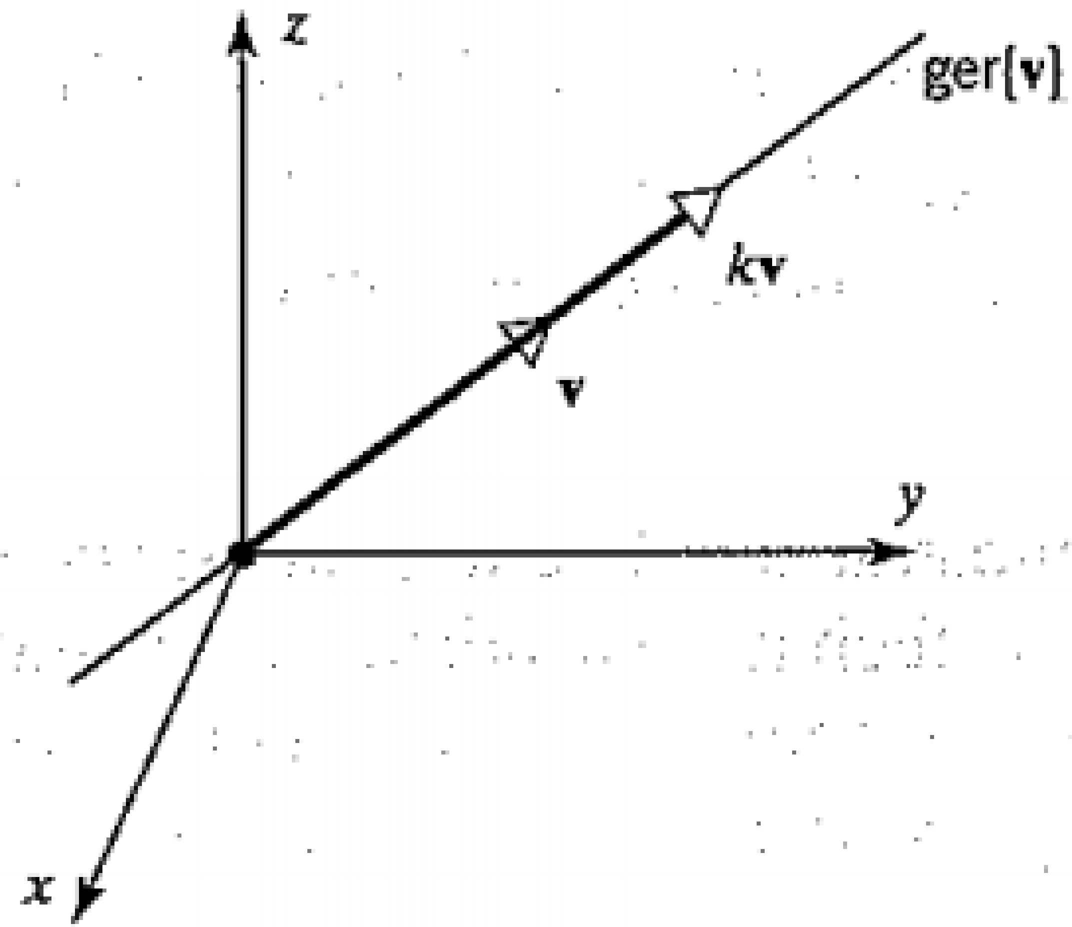
Definição

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é um conjunto de vetores de um espaço vetorial V, então o subespaço W de V que consiste de todas as combinações lineares dos vetores em S é chamado o ***espaço gerado*** por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ e nós dizemos que os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ ***geram*** W. Para indicar que W é o espaço gerado pelos vetores do conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, nós escrevemos

$$W = \text{ger}(S) \quad \text{ou} \quad W = \text{ger}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$$



(*a*) ger $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é o plano pela origem determinado por $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.



(b) ger {**v**} é a reta pela origem determinada por **v**.

EXEMPLO 11 Conjunto Gerador para P_n

Os polinômios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ geram o espaço vetorial P_n definido no Exemplo 5, pois cada polinômio $\mathbf{p}$ em P_n pode ser escrito como

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

que é uma combinação linear de $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Nós podemos denotar isto escrevendo

$$P_n = \text{ger}\,\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

◆

EXEMPLO 12 Três Vetores que não Geram R^3

Determine se $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 3)$ geram o espaço vetorial R^3.

Solução.

Nós devemos determinar se um vetor arbitrário $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ em R^3 pode ser escrito como uma combinação linear

$$\mathbf{b} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

dos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Escrevendo esta equação em termos dos componentes dá

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0, 1) + k_3(2, 1, 3)$$

ou

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + k_2 + 2k_3, k_1 + k_3, 2k_1 + k_2 + 3k_3)$$

ou

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + 2k_3 &= b_1 \\ k_1 \phantom{{}+k_2} + k_3 &= b_2 \\ 2k_1 + k_2 + 3k_3 &= b_3 \end{aligned}$$

O problema portanto reduz a determinar se este sistema é consistente para quaisquer valores de b_1, b_2 e b_3. Pelas partes (*e*) e (*g*) do Teorema 4.3.4, este sistema é consistente para quaisquer b_1, b_2 e b_3 se, e somente se, a matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

tem um determinante não-nulo. Contudo, $\det(A) = 0$ (verifique), de modo que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ não geram R^3. ◆

Os conjuntos geradores não são únicos. Por exemplo, quaisquer dois vetores não-colineares que estão no plano mostrado na Figura 5.2.5 geram aquele plano e qualquer vetor não-nulo na reta daquela figura gera aquela reta. Nós deixamos a prova do seguinte teorema útil como exercício.

Teorema 5.2.4

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ e $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ são dois conjuntos de vetores em um espaço vetorial V, então

$$\operatorname{ger}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\} = \operatorname{ger}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$$

se, e somente se, cada vetor em S é uma combinação linear dos vetores de S' e cada vetor em S' é uma combinação linear dos vetores de S.

INDEPENDÊNCIA LINEAR

Definição

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é um conjunto não-vazio de vetores, então a equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

tem pelo menos uma solução, a saber,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \ldots, \quad k_r = 0$$

Se esta é a única solução, então o conjunto S é chamado ***linearmente independente***. Se existem outras soluções, então S é um conjunto ***linearmente dependente***.

EXEMPLO 5 Um Conjunto Linearmente Independente em P_n

Mostre que os polinômios

$$1, x, x^2, \ldots, x^n$$

formam um conjunto linearmente independente em P_n.

Solução.

Sejam $\mathbf{p}_0 = 1$, $\mathbf{p}_1 = x$, $\mathbf{p}_2 = x^2, \ldots, \mathbf{p}_n = x^n$ e suponha que alguma combinação linear destes polinômios é nula, digamos

$$a_0\mathbf{p}_0 + a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + \cdots + a_n\mathbf{p}_n = \mathbf{0}$$

ou, equivalentemente,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0 \quad \text{para todo } x \text{ em } (-\infty, \infty) \tag{1}$$

Nós devemos mostrar que

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Para ver isto, lembre da Álgebra que um polinômio *não-nulo* de grau n tem no máximo n raízes distintas. Segue-se que $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, pois, caso contrário, teríamos por (1) que $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ é um polinômio não-nulo com infinitas raízes. ◆

Teorema 5.3.1

Um conjunto S de dois ou mais vetores é:

(*a*) *linearmente dependente se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores de S.*
(*b*) *linearmente independente se, e somente se, nenhum vetor em S pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores de S.*

Teorema 5.3.2

(*a*) *Um conjunto finito de vetores que contém o vetor nulo é linearmente dependente.*
(b) *Um conjunto de exatamente dois vetores é linearmente independente se, e somente se, nenhum dos dois vetores é um múltiplo escalar do outro.*

método geral que possa ser utilizado para estabelecer a dependência ou independência linear de funções em $F(-\infty, \infty)$, nós iremos desenvolver um teorema que, às vezes, pode ser usado para mostrar que um dado conjunto de funções é linearmente independente.

Se $\mathbf{f}_1 = f_1(x)$, $\mathbf{f}_2 = f_2(x), \ldots, \mathbf{f}_n = f_n(x)$ são funções $n-1$ vezes diferenciáveis no intervalo $(-\infty, \infty)$, então chamamos o determinante da matriz

$$W(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

o ***wronskiano*** de $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Como veremos a seguir, este determinante é útil para decidir se as funções $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ formam um conjunto linearmente independente de vetores no espaço vetorial $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$.

Teorema 5.3.4

Se as funções $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ *têm* $n - 1$ *derivadas contínuas no intervalo* $(-\infty, \infty)$ *e se o wronskiano destas funções não é identicamente zero em* $(-\infty, \infty)$, *então estas funções formam um conjunto linearmente independente de vetores em* $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$.

EXEMPLO 9 Um Conjunto Linearmente Independente em $C^1(-\infty, \infty)$

Mostre que as funções $\mathbf{f}_1 = x$ e $\mathbf{f}_2 = \text{sen } x$ formam um conjunto linearmente independente de vetores em $C^1(-\infty, \infty)$.

Solução.

No Exemplo 8 nós mostramos que estes vetores formam um conjunto linearmente independente observando que nenhum dos dois vetores é múltiplo do outro. Para fins ilustrativos, vamos obter este resultado usando o Teorema 5.3.4. O wronskiano é

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \text{sen } x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x \cos x - \text{sen } x$$

Esta função não é identicamente zero no intervalo $(-\infty, \infty)$ (verifique), de modo que $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ formam um conjunto linearmente independente de vetores. ♦

EXEMPLO 10 Um Conjunto Linearmente Independente em $C^2(-\infty, \infty)$

Mostre que $\mathbf{f}_1 = 1$, $\mathbf{f}_2 = e^x$ e $\mathbf{f}_3 = e^{2x}$ formam um conjunto linearmente independente de vetores em $C^2(-\infty, \infty)$.

Solução.

O wronskiano é

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x}$$

Esta função não é identicamente zero (mais que isto, esta função nunca se anula) no intervalo $(-\infty, \infty)$, de modo que $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ e $\mathbf{f}_3$ formam um conjunto linearmente independente de vetores. ◆

OBSERVAÇÃO. A recíproca do Teorema 5.3.4 é falsa. Se o wronskiano de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ é identicamente zero em $(-\infty, \infty)$, então nada pode ser deduzido sobre a independência linear de $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$; este conjunto de vetores pode ser linearmente independente ou linearmente dependente. (Omitimos os detalhes.)

Definição

Se V é um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é um conjunto de vetores em V, dizemos que S é uma ***base*** de V se valerem as seguintes condições:

(a) S é linearmente independente.
(b) S gera V.

Teorema 5.4.1 **Unicidade da Representação em Base**

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V, então cada vetor em V pode ser expresso da forma $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ de uma única maneira.

Teorema 5.4.2

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *uma base qualquer de V.*

(*a*) *Um conjunto com mais do que n vetores é linearmente dependente.*
(*b*) *Um conjunto com menos do que n vetores não gera V.*

Definição

Um espaço vetorial não-nulo *V* é chamado ***de dimensão finita*** se contém um conjunto finito $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de vetores que constitui uma base de *V*. Se não existir um tal conjunto, dizemos que *V* é ***de dimensão infinita***. Além disto, consideramos o espaço vetorial nulo como sendo de dimensão finita.

Teorema 5.4.3

Todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de vetores.

Definição

A ***dimensão*** de um espaço vetorial de dimensão finita V é definida como o número de vetores de uma base de V e denotada por $\dim(V)$. Além disto, definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero.

Teorema 5.4.6

Seja S um conjunto finito de vetores em um espaço vetorial V de dimensão finita.

(a) *Se S gera V mas não é uma base de V, então S pode ser reduzido a uma base de V removendo vetores apropriados de S.*

(b) *Se S é um conjunto linearmente independente que não é uma base de V, então S pode ser ampliado para uma base de V acrescentando vetores apropriados a S.*

Teorema 5.4.7

Se W é um subespaço de um espaço vetorial V de dimensão finita, então $\dim(W) \leq \dim(V)$; *além disto, se* $\dim(W) = \dim(V)$, *então* $W = V$.