DEFINIÇÃO ALGÉBRICA

produto escalar de dois vetores

$$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

número real

também é indicado por

$< \vec{u}, \vec{v} >$ e se lê "$\vec{u}$ escalar $\vec{v}$".

PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR

Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ e o número real α, é fácil verificar que:

I) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

II) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ e $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

III) $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$

IV) $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$, se $\vec{u} = \vec{0} = (0,0,0)$

V) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

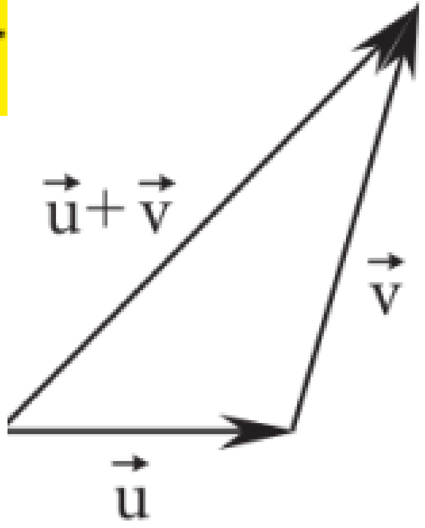
Mostrar que $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

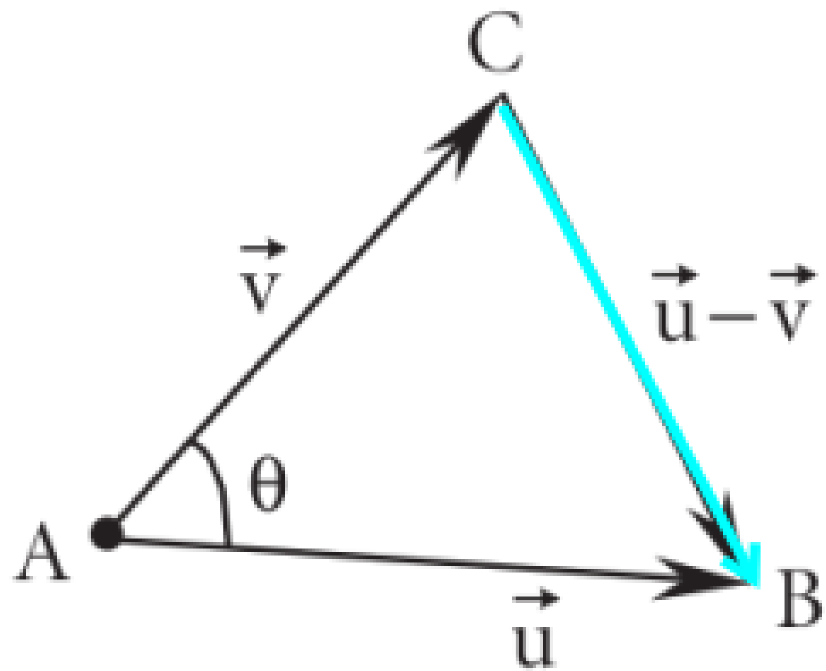
Provar que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$

$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$ (*Desigualdade de Schwarz*)

$|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}|$ (*Desigualdade triangular*



DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA DE PRODUTO ESCALAR



lei dos cossenos ao triângulo ABC

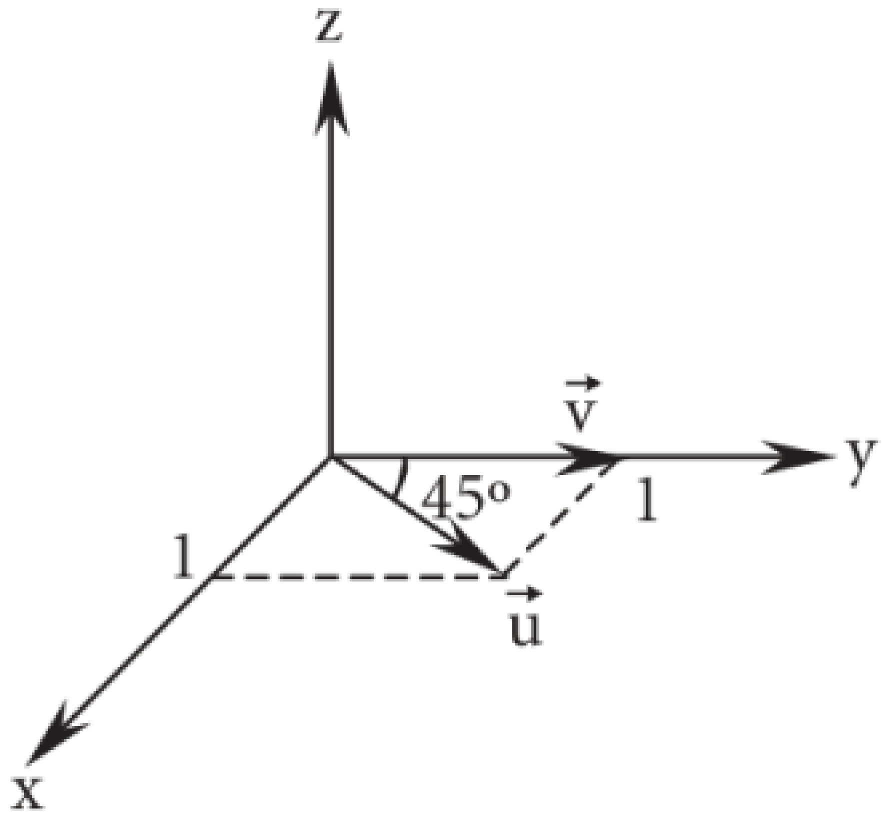
$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$\cancel{|\vec{u}|^2} + \cancel{|\vec{v}|^2} \cancel{-2}\vec{u}\cdot\vec{v} = \cancel{|\vec{u}|^2} + \cancel{|\vec{v}|^2} \cancel{-2}|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\ ,\ 0° \le \theta \le 180°$$



$$\vec{u} = (1,1,0)$$

$$\vec{v} = (0,1,0)$$

Figura 2.2

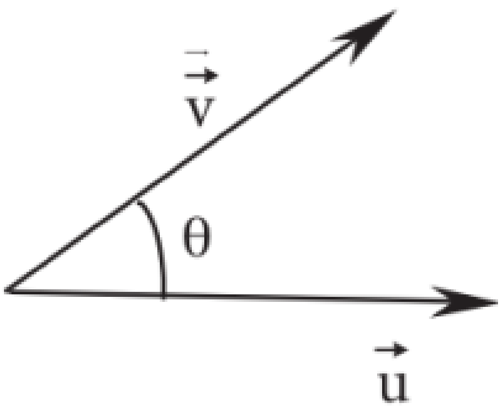
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1(0) + 1(1) + 0(0) = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos 45^\circ = (\sqrt{2})(1)(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1$$

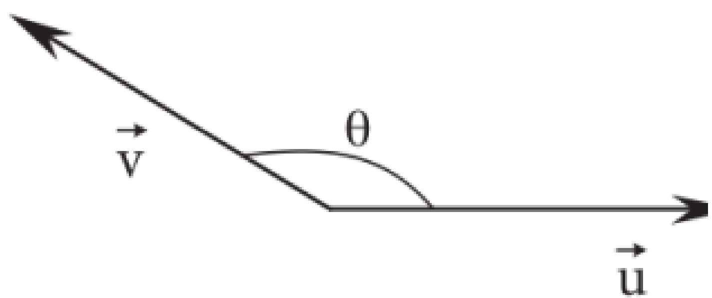
1) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow \cos\theta > 0 \Leftrightarrow 0° \leq \theta < 90°$ (Figura 2.4(a))

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \cos\theta < 0 \Leftrightarrow 90° < \theta \leq 180°$ (Figura 2.4 (b))

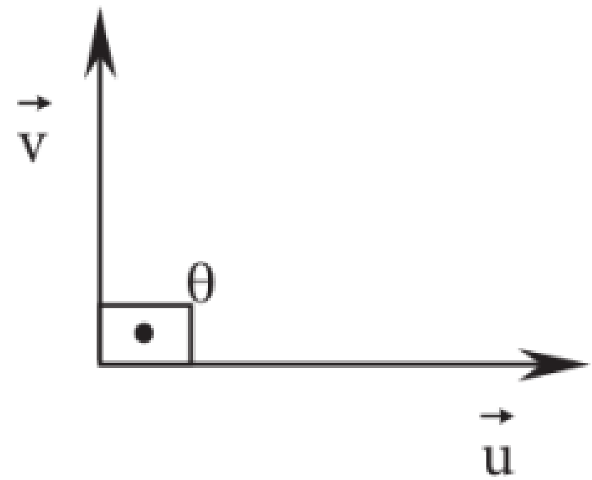
3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90°$ (Figura 2.4 (c))



(a)



(b)



(c)

afirmação estabelece a *condição de ortogonalidade* de dois vetores:

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

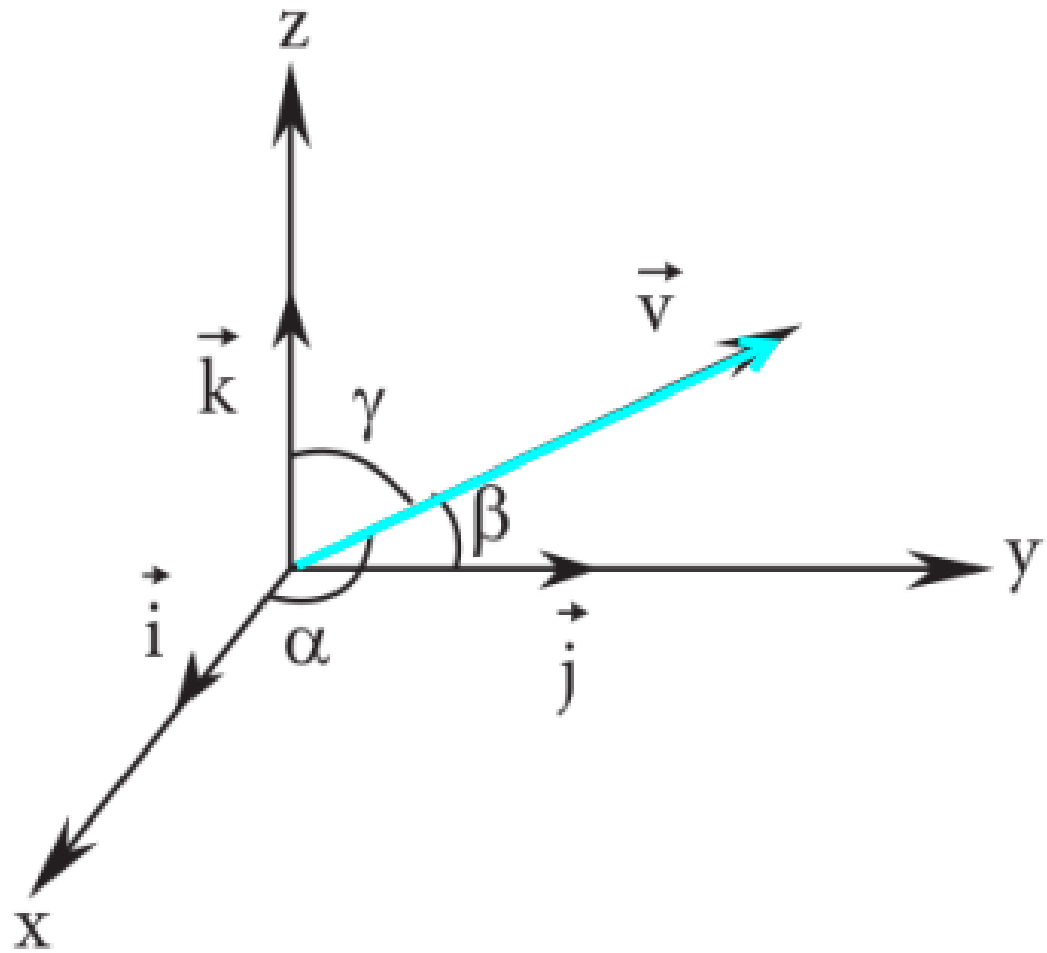
Observação

O vetor $\vec{0}$ é ortogonal a todo vetor, ou seja,

$$\vec{0} \cdot \vec{v} = 0 \text{ para todo } \vec{v}.$$

CÁLCULO DO ÂNGULO DE DOIS VETORES

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$



Ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos α, β e γ que $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente (Figura 2.9).

Cossenos diretores de $\vec{v}$ são os cossenos de seus ângulos diretores, ou seja, cos α, cos β e cos γ.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(1,0,0)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}||\vec{j}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,1,0)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{z}{|\vec{v}|}$$

Observação $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(x,y,z)}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Pretendemos decompor

um dos vetores, digamos $\vec{v}$, tal que

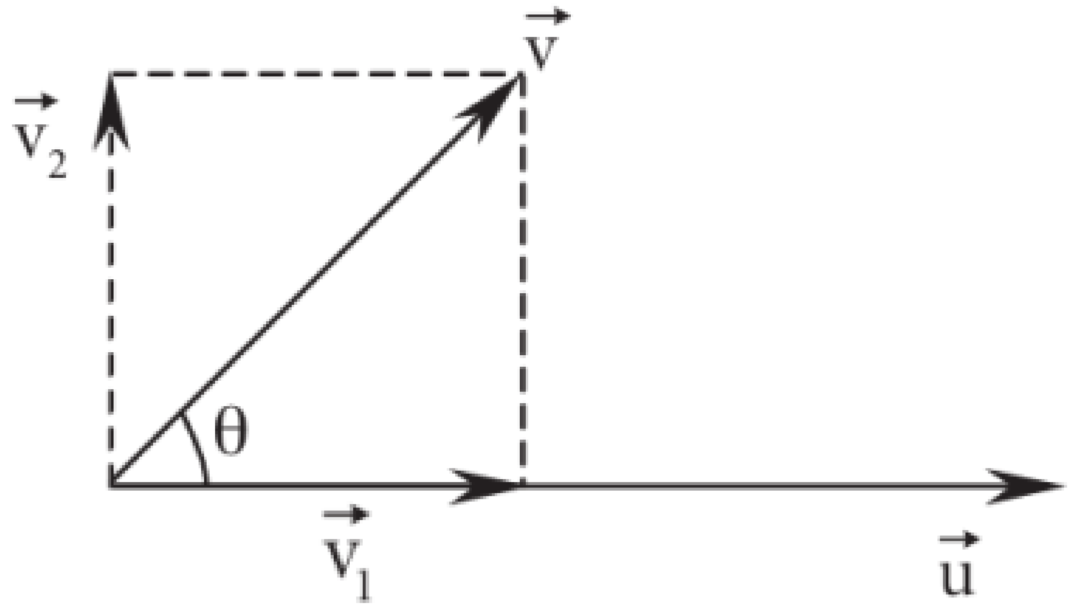
$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

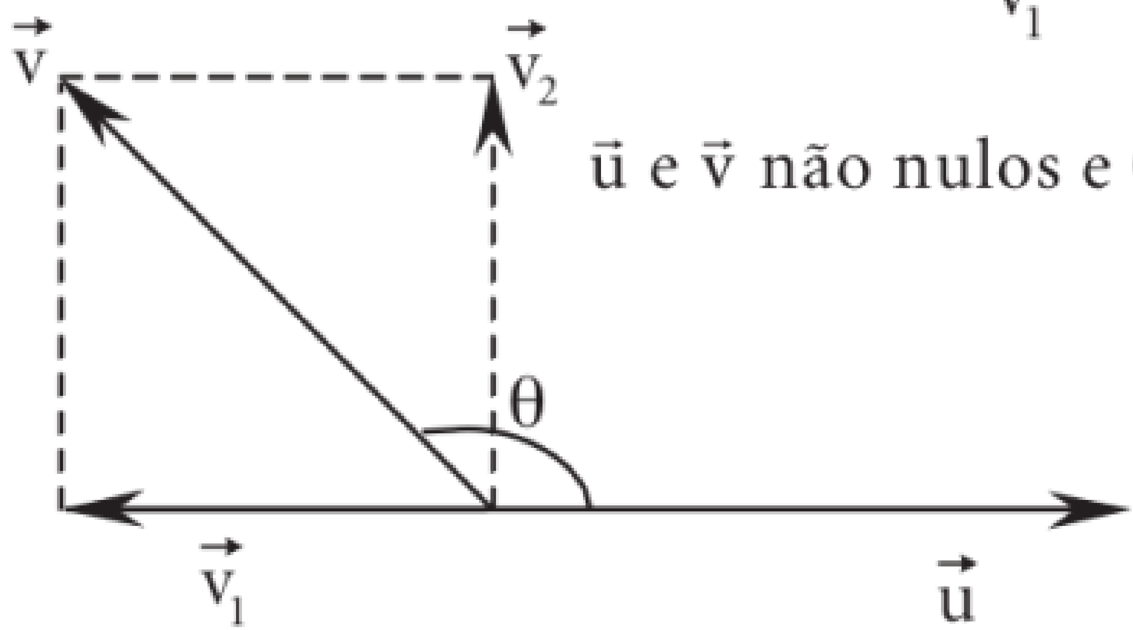
sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

$\vec{v}_1$ é chamado *projeção ortogonal de* $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u}$

$$\vec{v}_1 = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$$

PROJEÇÃO DE UM VETOR SOBRE OUTRO





$\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos e θ o ângulo entre eles