Radiciação e potenciação

Radicais

DEFINIÇÃO Raiz *n*-ésima de um número real

Sejam n um número inteiro maior que 1 e a e b números reais.

1. Se $b^n = a$, então b é uma **raiz *n*-ésima** de a.

2. Se a tem uma raiz n-ésima, então a **principal raiz *n*-ésima** de a é aquela com o mesmo sinal de a.

expressão com o radical $\sqrt[n]{a}$

índice do radical $\qquad$ a é o **radicando**.

Por exemplo, $\sqrt[4]{16} = \pm 2$

A *principal* raiz quarta de 16 é 2.

Quando $n = 2$, Omitimos o índice e escrevemos $\sqrt{a}$

Se a é um número real positivo e n um inteiro par positivo

suas duas raízes são denotadas por $\sqrt[n]{a}$ e $-\sqrt[n]{a}$

EXEMPLO 1

(a) $\sqrt{36} = 6$ porque $6^2 = 36$.

(b) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{3}{2}$ porque $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8}$.

(c) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{8}} = -\dfrac{3}{2}$ porque $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3 = -\dfrac{27}{8}$.

(d) $\sqrt[4]{-625}$ não é um número real porque o índice 4 é par e o radicando -625 é negativo

Propriedades dos radicais

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas e m e n números positivos inteiros maiores que 1.

Propriedade

1. $\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v}$

2. $\sqrt[n]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}}$

Exemplo

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3}$$
$$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{\frac{96}{6}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[m\cdot n]{u}$ $\qquad \sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2\cdot 3]{7} = \sqrt[6]{7}$

4. $\left(\sqrt[n]{u}\right)^n = u$ $\qquad \left(\sqrt[4]{5}\right)^4 = 5$

5. $\sqrt[n]{u^m} = \left(\sqrt[n]{u}\right)^m$ $\qquad \sqrt[3]{27^2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$

6. $\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u| \text{ para } n \text{ par} & \sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6 \\ u \text{ para } n \text{ ímpar} & \sqrt[3]{(-6)^3} = -6 \end{cases}$

Simplificação de expressões com radicais

EXEMPLO 2 Remoção de fatores dos radicandos

(a) $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{16 \cdot 5}$

$= \sqrt[4]{2^4 \cdot 5}$

$= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{5}$

$= 2\sqrt[4]{5}$

(b) $\sqrt{18x^5} = \sqrt{9x^4 \cdot 2x}$

$= \sqrt{(3x^2)^2 \cdot 2x}$

$= 3x^2\sqrt{2x}$

(c) $\sqrt[4]{x^4y^4} = \sqrt[4]{(xy)^4}$

$= |xy|$

(d) $\sqrt[3]{-24y^6} = \sqrt[3]{(-2y^2)^3 \cdot 3}$

$= -2y^2\sqrt[3]{3}$

Racionalização

Quando o denominador tem a forma $\sqrt[n]{u^k}$, multiplicando numerador e denominador por $\sqrt[n]{u^{n-k}}$ poderemos eliminar o radical do denominador, pois

$$\sqrt[n]{u^k} \cdot \sqrt[n]{u^{n-k}} = \sqrt[n]{u^k \cdot u^{n-k}} = \sqrt[n]{u^{k+n-k}} = \sqrt[n]{u^n} = u.$$

Racionalização

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^4}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{|x|}$$

$$\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[5]{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x^2 y^2}}{\sqrt[5]{y^5}} = \frac{\sqrt[5]{x^2 y^2}}{y}$$

Potenciação com expoentes racionais

DEFINIÇÃO Expoentes racionais

Seja u um número real, variável ou expressão algébrica n um inteiro maior que 1. Então

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}.$$

Se m é um inteiro positivo, m/n está na forma reduzida e todas as raízes são números reais, então

$$u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m \qquad \text{e} \qquad u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}$$

Vejamos:

$$u^{2/3} = (\sqrt[3]{u})^2$$

e esta expressão está definida para todo número u real, mas

$$u^{4/6} = (\sqrt[6]{u})^4$$

está definida somente para $u \geq 0$.

EXEMPLO 4 Conversão de radicais para potências e vice-versa

(a) $\sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{3/2}$

(b) $3x\sqrt[5]{x^2} = 3x \cdot x^{2/5} = 3x^{7/5}$

(c) $x^{2/3}y^{1/3} = (x^2y)^{1/3} = \sqrt[3]{x^2y}$

(d) $z^{-3/2} = \dfrac{1}{z^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{z^3}}$

EXEMPLO 5 Simplificação de expressões com potências

(a) $(x^2y^9)^{1/3}(xy^2) = (x^{2/3}y^3)(xy^2) = x^{5/3}y^5$

(b) $\left(\dfrac{3x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\dfrac{2x^{-1/2}}{y^{2/5}}\right) = \dfrac{6x^{1/6}}{y^{9/10}}$

EXEMPLO 6 Simplificação de expressões com radicais

(a) $2\sqrt{80} - \sqrt{125} = 2\sqrt{16 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 5} = 8\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

(b) $\sqrt{4x^2y} - \sqrt{y^3} = \sqrt{(2x)^2y} - \sqrt{y^2y} = 2|x|\sqrt{y} - |y|\sqrt{y}$

$$= (2|x| - |y|)\sqrt{y}$$