# PRODUTO MISTO

O produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ também é indicado por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

número real $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

$$\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k},\ \vec{v} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \text{ e } \vec{w} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k},$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

O produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

# PROPRIEDADES DO PRODUTO MISTO

**I)** O produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ muda de sinal ao trocarmos a posição de dois vetores.

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 27$, teríamos

$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -27$ (permuta de $\vec{u}$ e $\vec{v}$)

$(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -27$ (permuta de $\vec{u}$ e $\vec{w}$)

$(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -27$ (permuta de $\vec{v}$ e $\vec{w}$)

Então, se em relação ao produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ocorrer

a) uma permutação – haverá troca de sinal;

b) duas permutações – não altera o valor.

os sinais $\cdot$ e $\times$ podem ser permutados

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$$

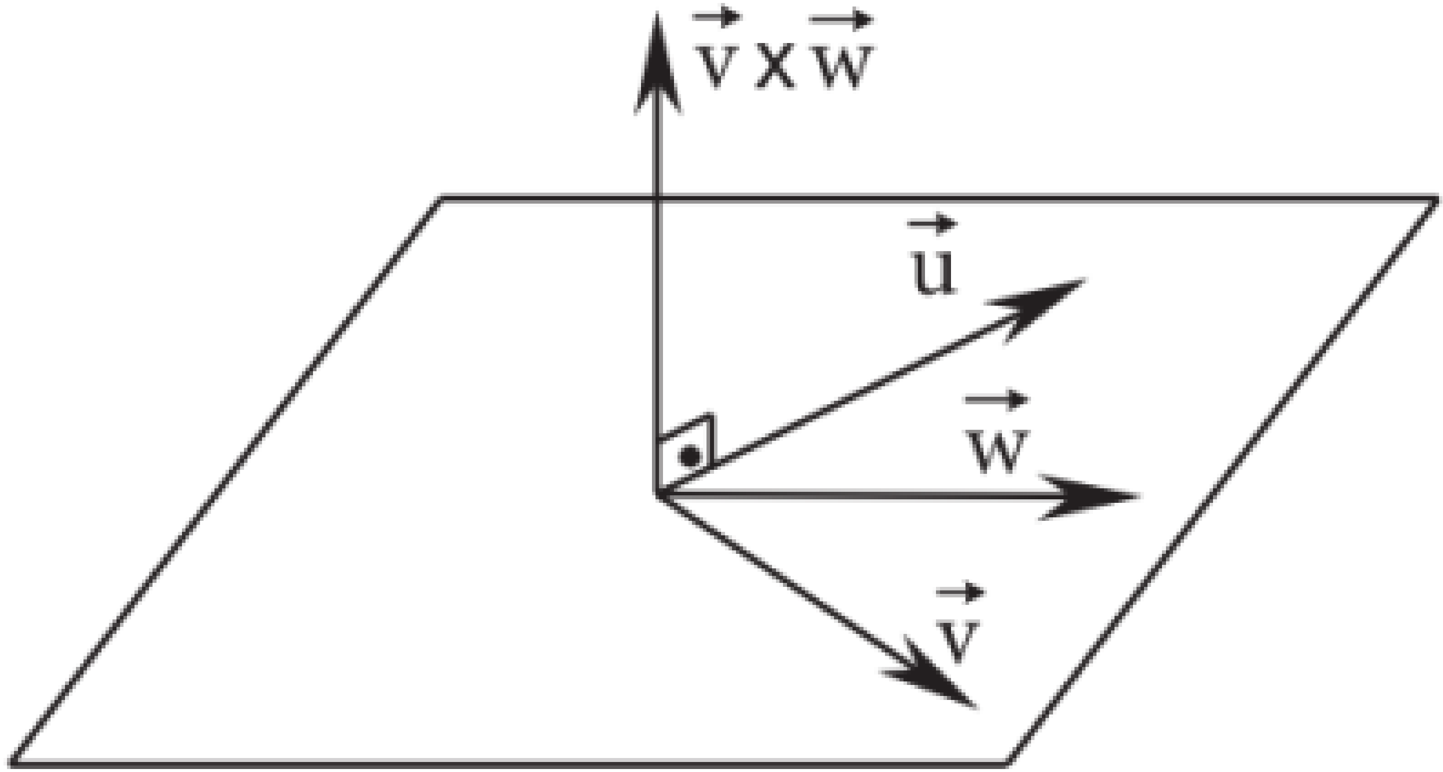
**II)** $(\vec{u}+\vec{x},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+(\vec{x},\vec{v},\vec{w})$

$$(\vec{u},\vec{v}+\vec{x},\vec{w})=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+(\vec{u},\vec{x},\vec{w})$$

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}+\vec{x})=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+(\vec{u},\vec{v},\vec{x})$$

**III)** $(\alpha\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\alpha\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w})=\alpha(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

**IV)** $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ se, e somente se, os três vetores forem coplanares

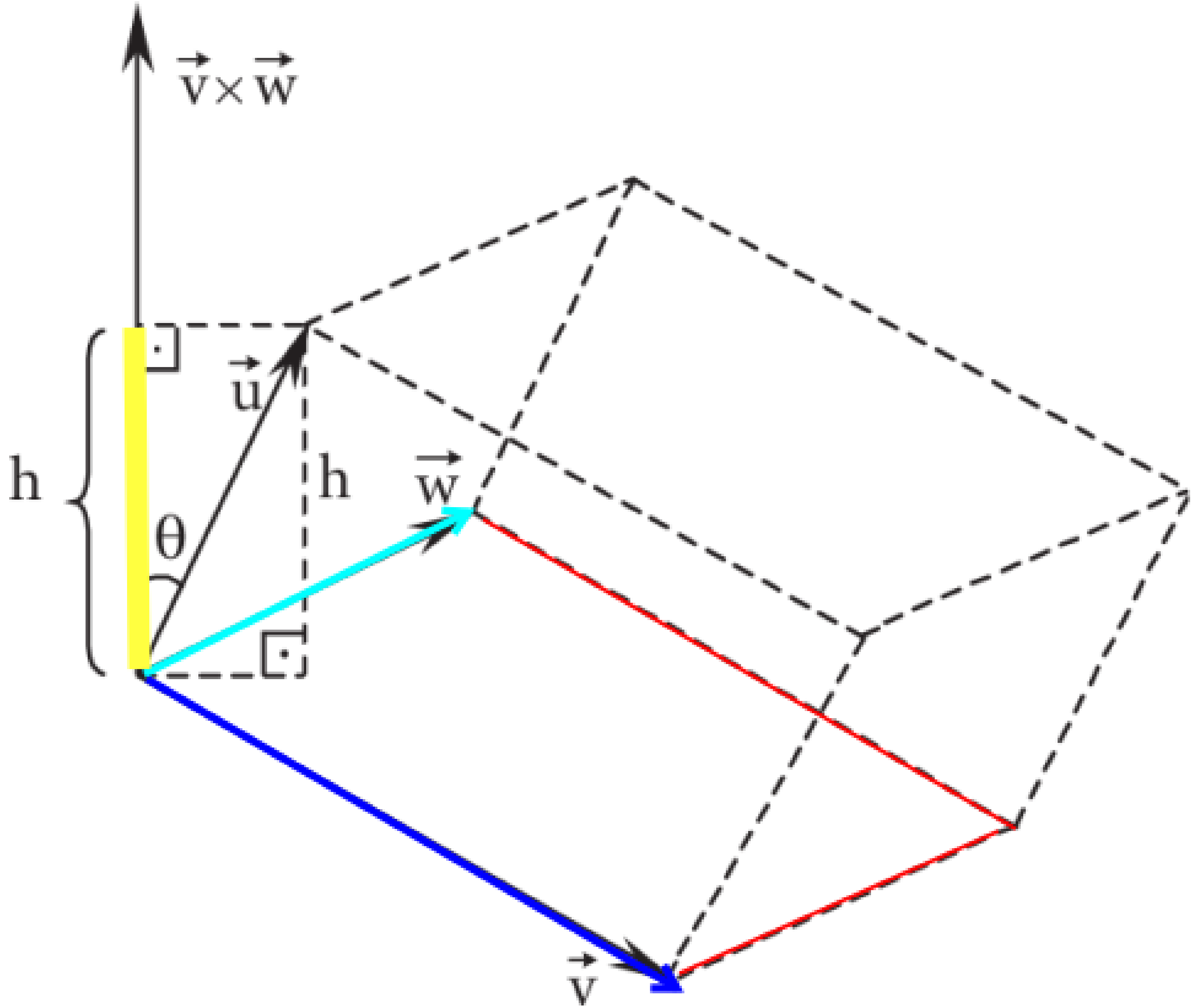



A equivalência da propriedade IV continua válida em situações particulares

a) *se pelo menos um dos vetores for nulo*

b) *se dois deles forem paralelos*

# INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÓDULO DO PRODUTO MISTO



A área da base do paralelepípedo

é $|\vec{v} \times \vec{w}|$.

$h = |\vec{u}||\cos\theta|$

$$
\begin{aligned}
V &= (\text{área da base})(\text{altura}) \\
&= |\vec{v} \times \vec{w}||\vec{u}||\cos\theta| \\
&= ||\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}|\cos\theta| \\
&= |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

# VOLUME DO TETRAEDRO

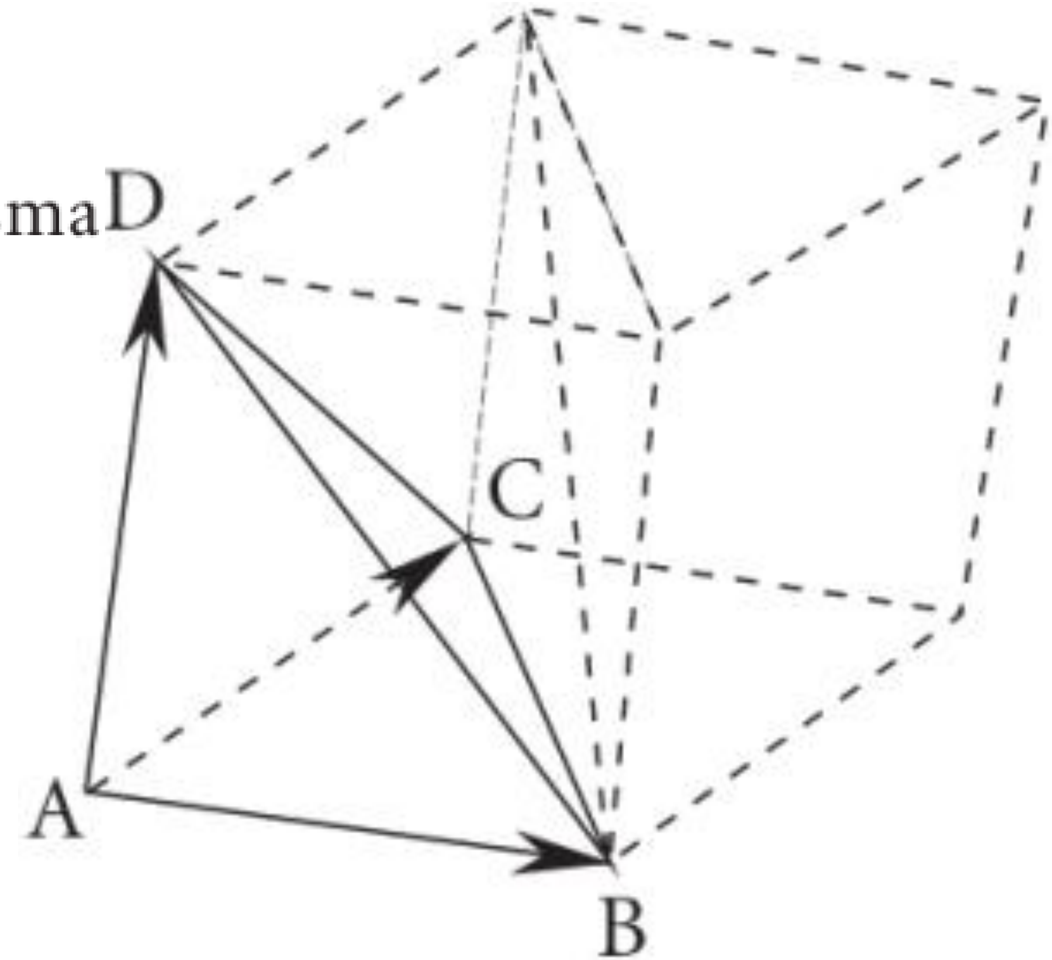
$$V = |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$$

o volume $V_p$ de cada prisma

$$V_p = \frac{1}{2} V$$

volume $V_t$ do tetraedro

$$V_t = \frac{1}{3} V_p = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} V\right)$$




$V_t = \frac{1}{6} V$ ou $\boxed{V_t = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|}$