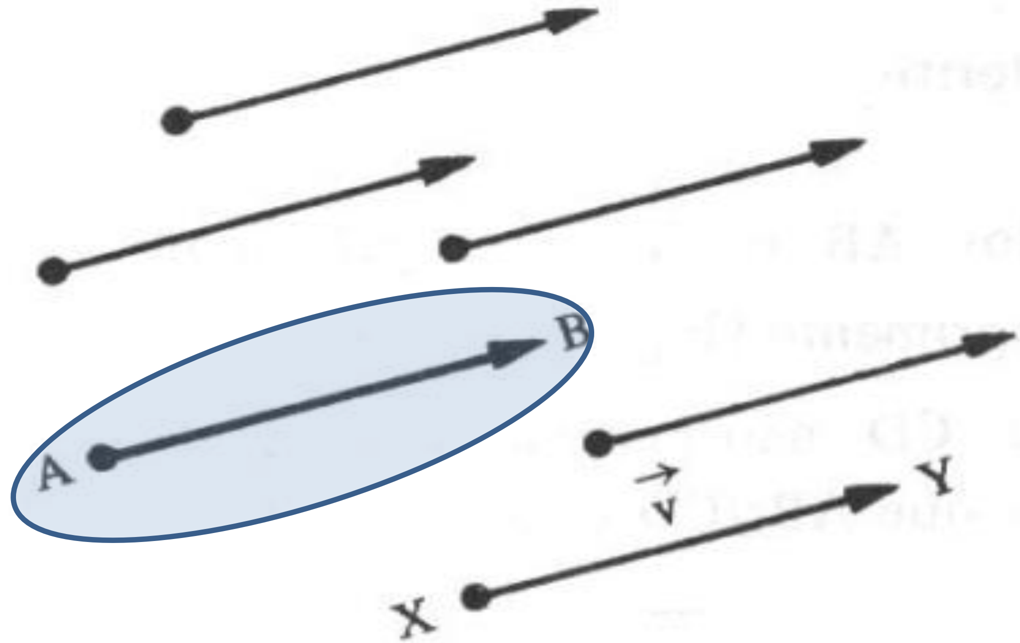
Vetor

Vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB (Fig. 1.4-a).



$$\vec{v} = \{XY / XY \sim AB\}$$

Figura 1.4-a

O vetor determinado por AB é indicado por $\overrightarrow{AB}$ ou $B - A$ ou $\vec{v}$.

As características de um vetor $\vec{v}$ são as mesmas de qualquer um de seus representantes: o módulo, direção e sentido do vetor são o módulo, direção e sentido de qualquer um de seus representantes.

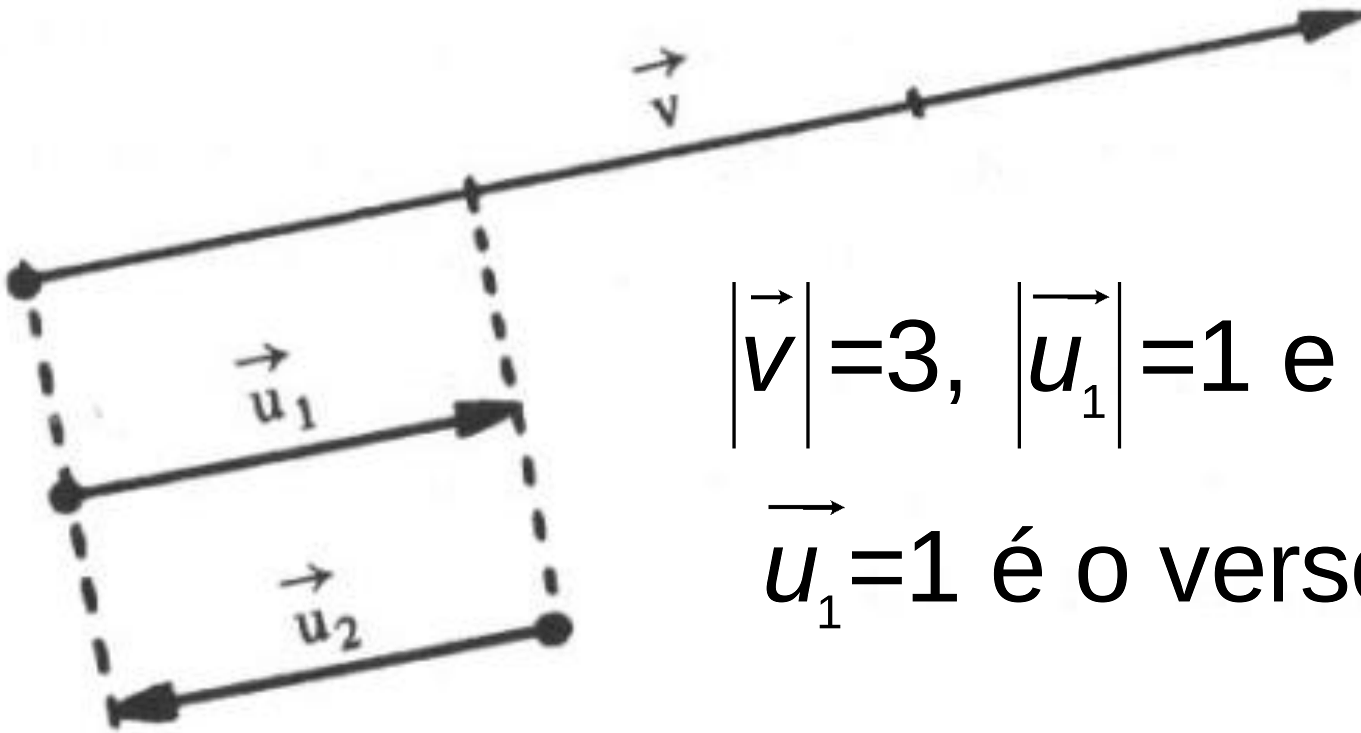
Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se eles possuem o mesmo módulo, direção e sentido.

Vetor nulo será indicado por $\vec{0}$.

Vetor Oposto: Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ o vetor é $\overrightarrow{BA}$ é o oposto do vetor $\vec{v}$ e é indicado por $-\overrightarrow{AB}$ ou $-\vec{v}$.

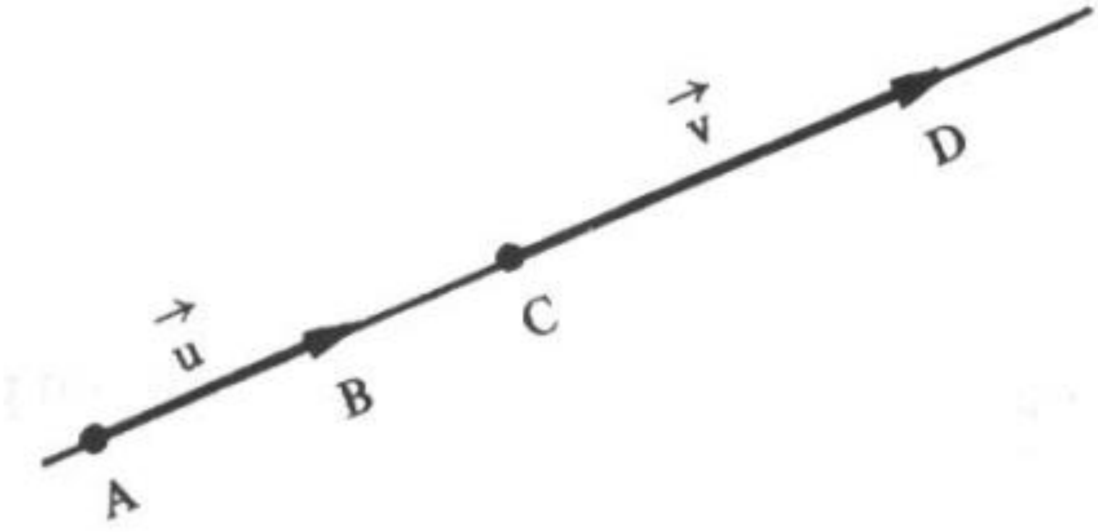
Vetor Unitário: Um vetor $\vec{v}$ é indicado unitário se $|\vec{v}| = 1$.

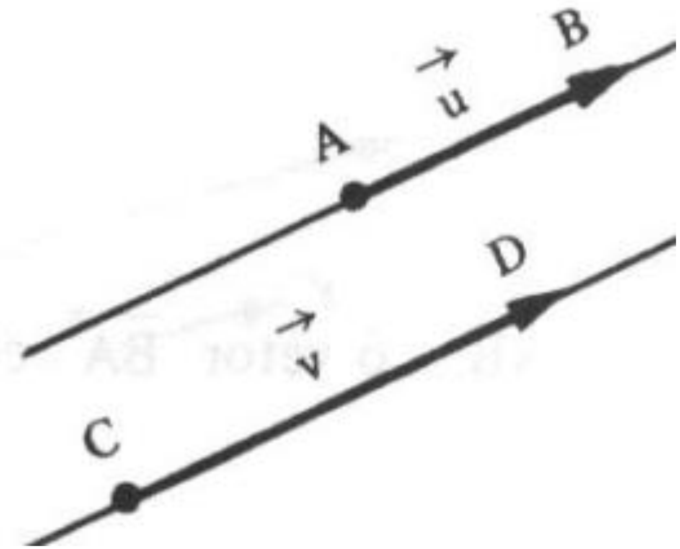
Versor de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário de mesma direção e sentido de $\vec{v}$.



$|\vec{v}| = 3$, $|\overrightarrow{u_1}| = 1$ e $|\overrightarrow{u_2}| = 1$ e

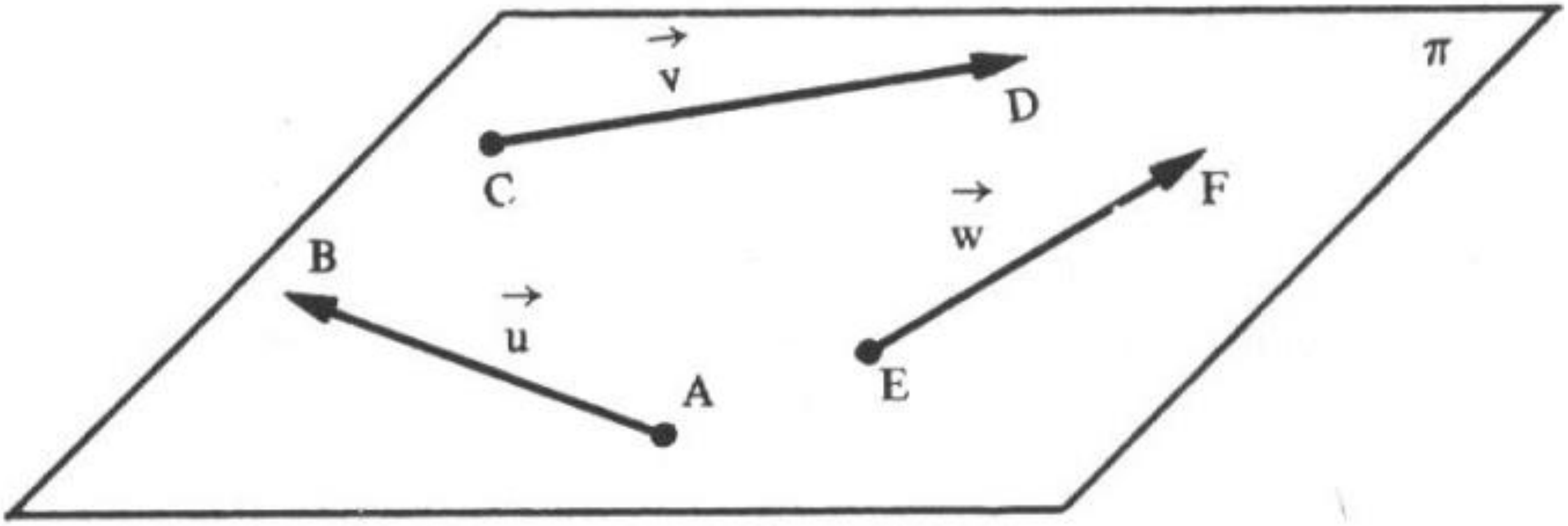
$\overrightarrow{u_1} = 1$ é o versor de $\vec{v}$.





Vetores colineares são vetores que tem a mesma direção. Dizemos tambem que estes vetores são **paralelos**. Indicamos por

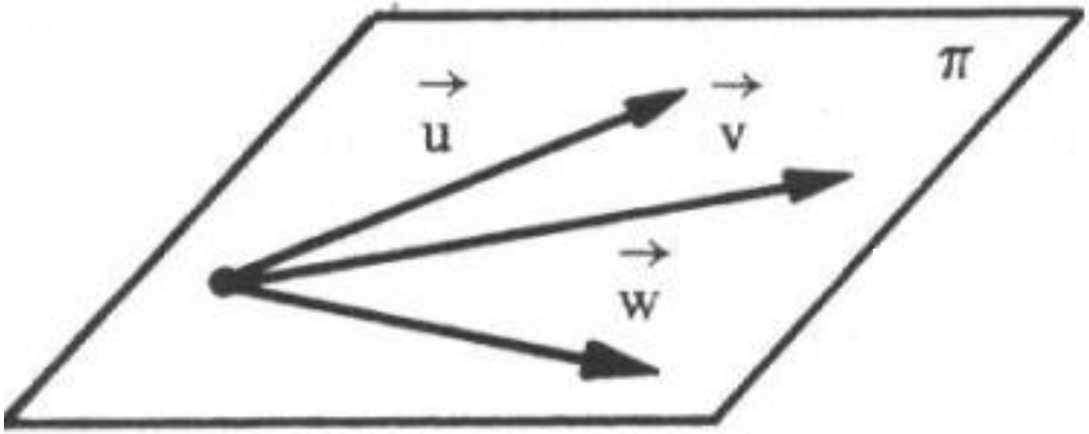
$$\vec{v} \, / / \, \vec{u}$$



Vetores coplanares são vetores estão no mesmo plano.

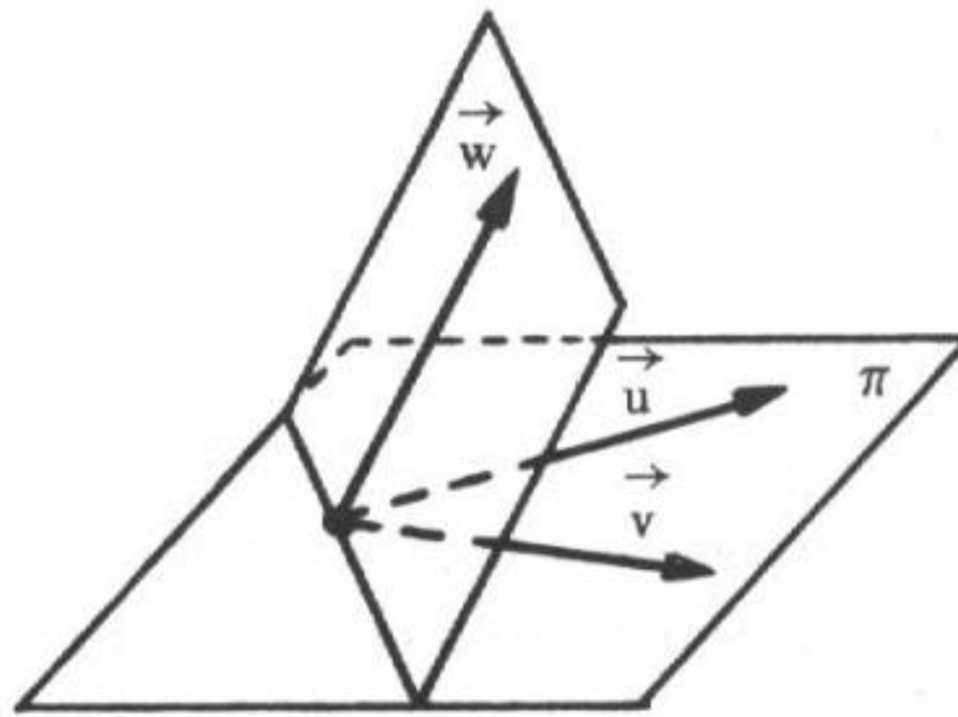
Note que quaisquer dois vetores são sempre Coplanares.

Três vetores poderão ou não ser coplanares (Figs. 1.4-e e 1.4-f)



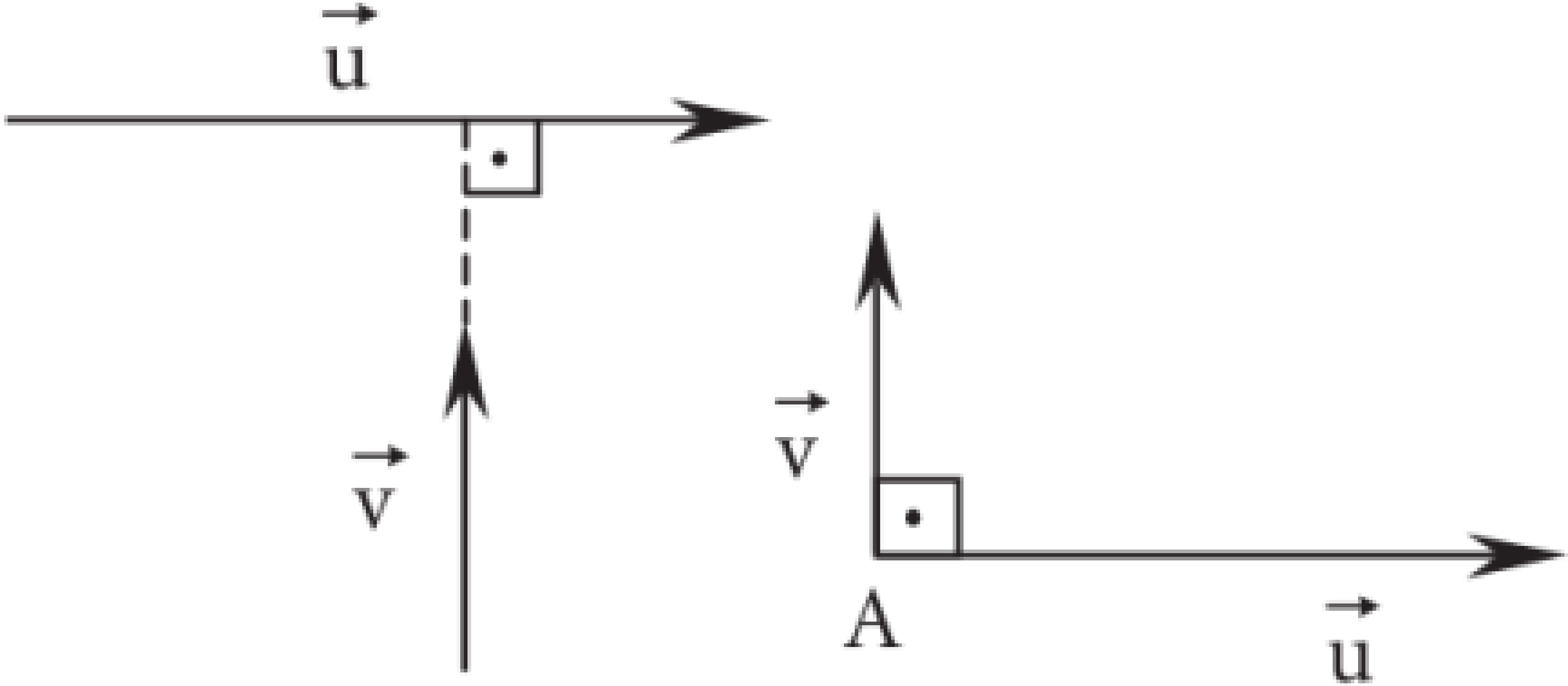
$\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares

Figura 1.4-e



$\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares

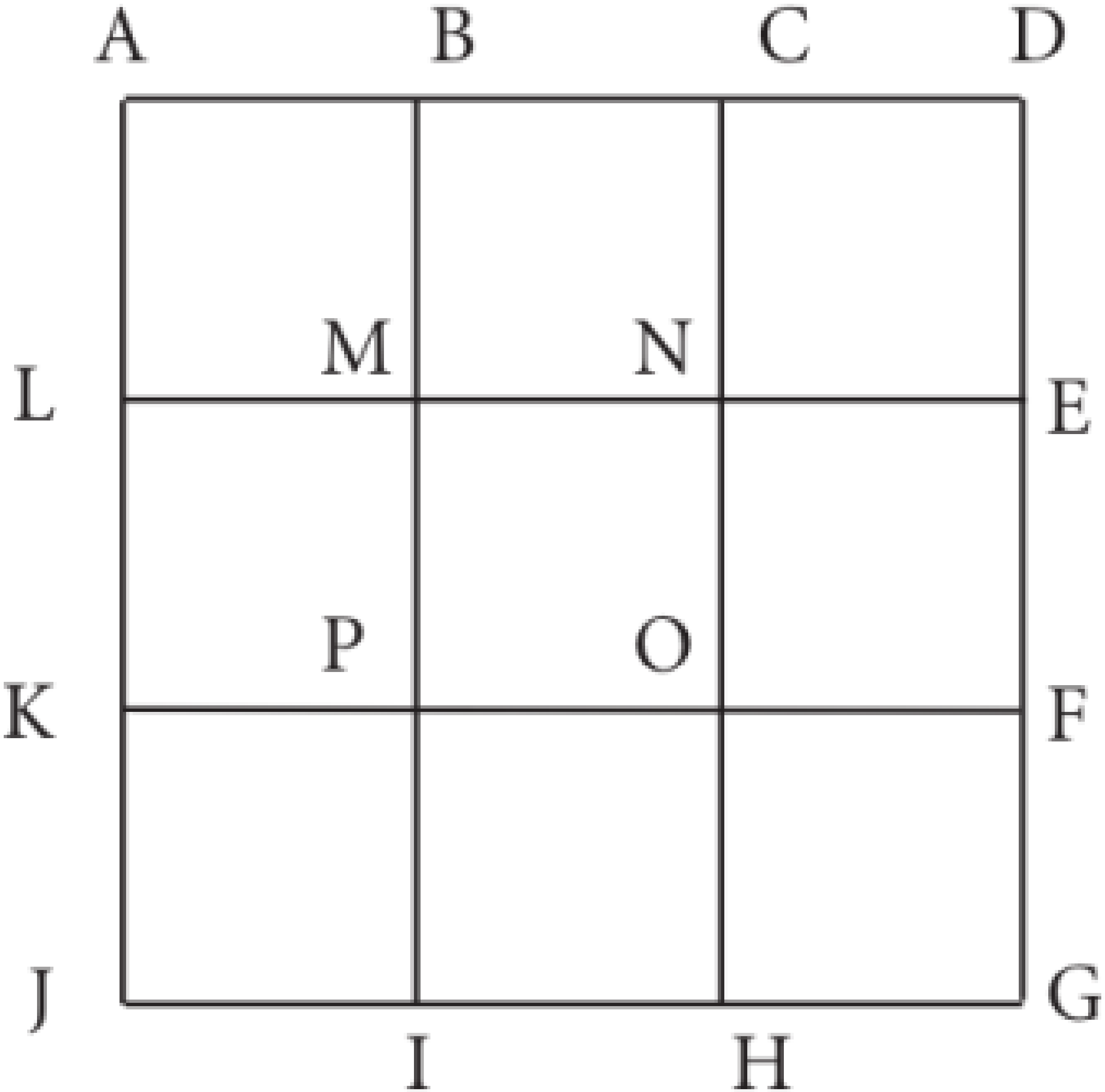
Figura 1.4-f



Dois vetores são ortogonais se seus respectivos representantes formarem um ângulo reto (90 graus)

Indicamos por

$$\vec{v} \perp \vec{u}$$



verdadeira ou falsa

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OF}$

b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PH}$

c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OP}$

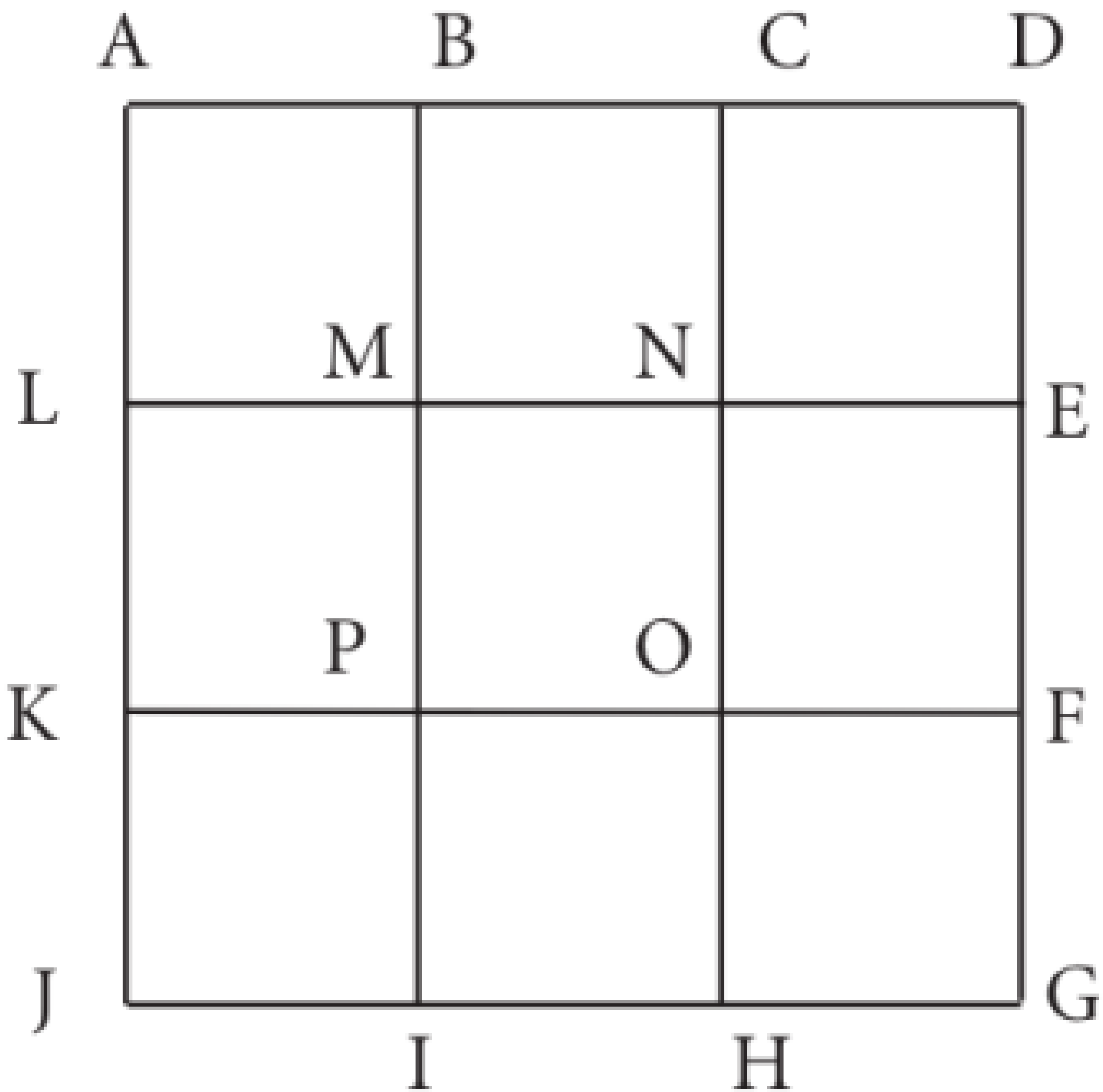
d) $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{MC}$

e) $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{ED}$

f) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MG}$

g) $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{FI}$

verdadeira ou falsa



h) $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{HI}$

i) $\overrightarrow{JO} \parallel \overrightarrow{LD}$

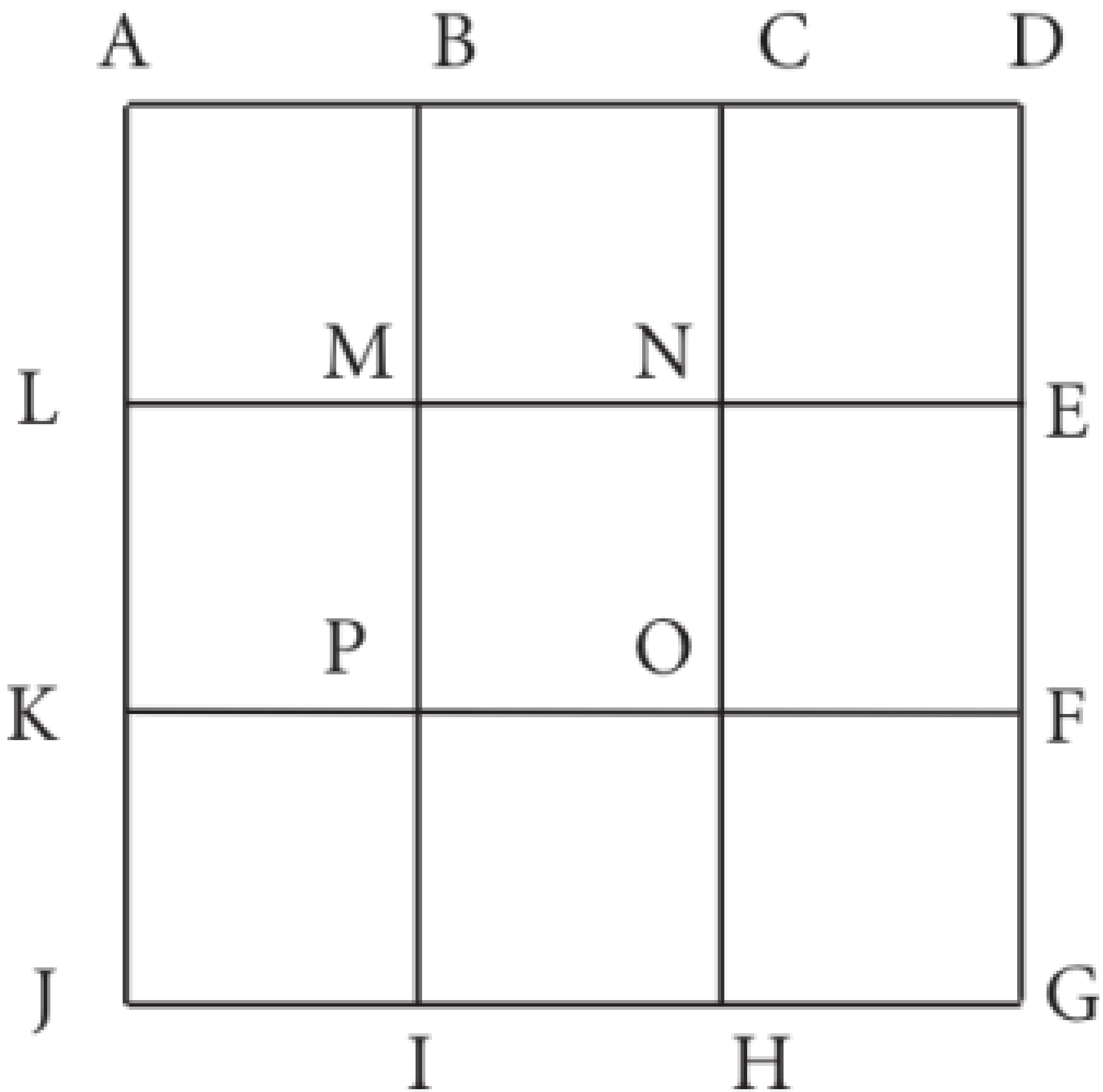
j) $\overrightarrow{AJ} \parallel \overrightarrow{FG}$

k) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EG}$

l) $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BL}$

m) $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{EC}$

n) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{NB}$



verdadeira ou falsa

o) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{AM}$

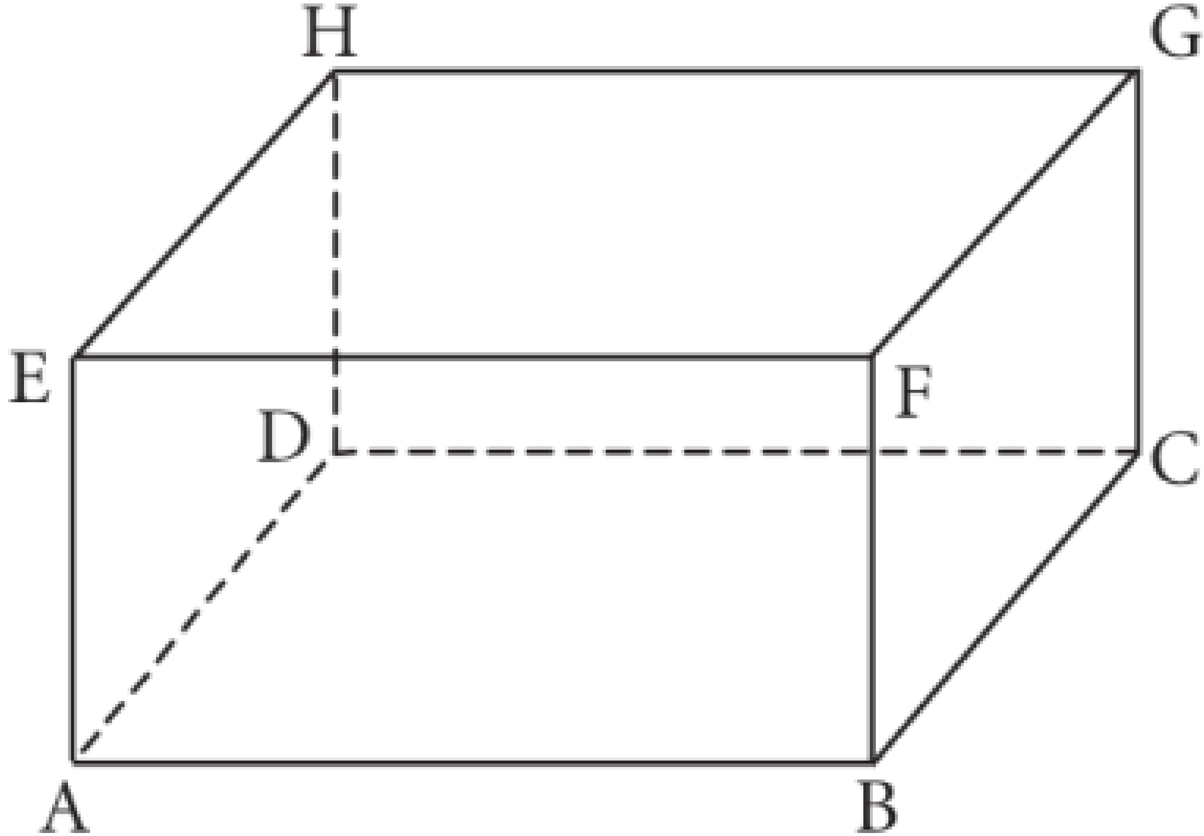
p) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{FP}|$

q) $|\overrightarrow{IF}| = |\overrightarrow{MF}|$

r) $|\overrightarrow{AJ}| = |\overrightarrow{AC}|$

s) $|\overrightarrow{AO}| = 2\,|\overrightarrow{NP}|$

t) $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BL}|$



verdadeira ou falsa

a) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$

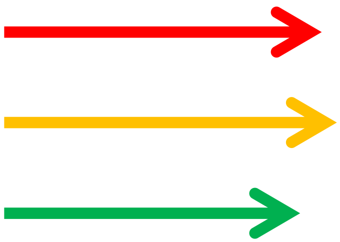
b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$

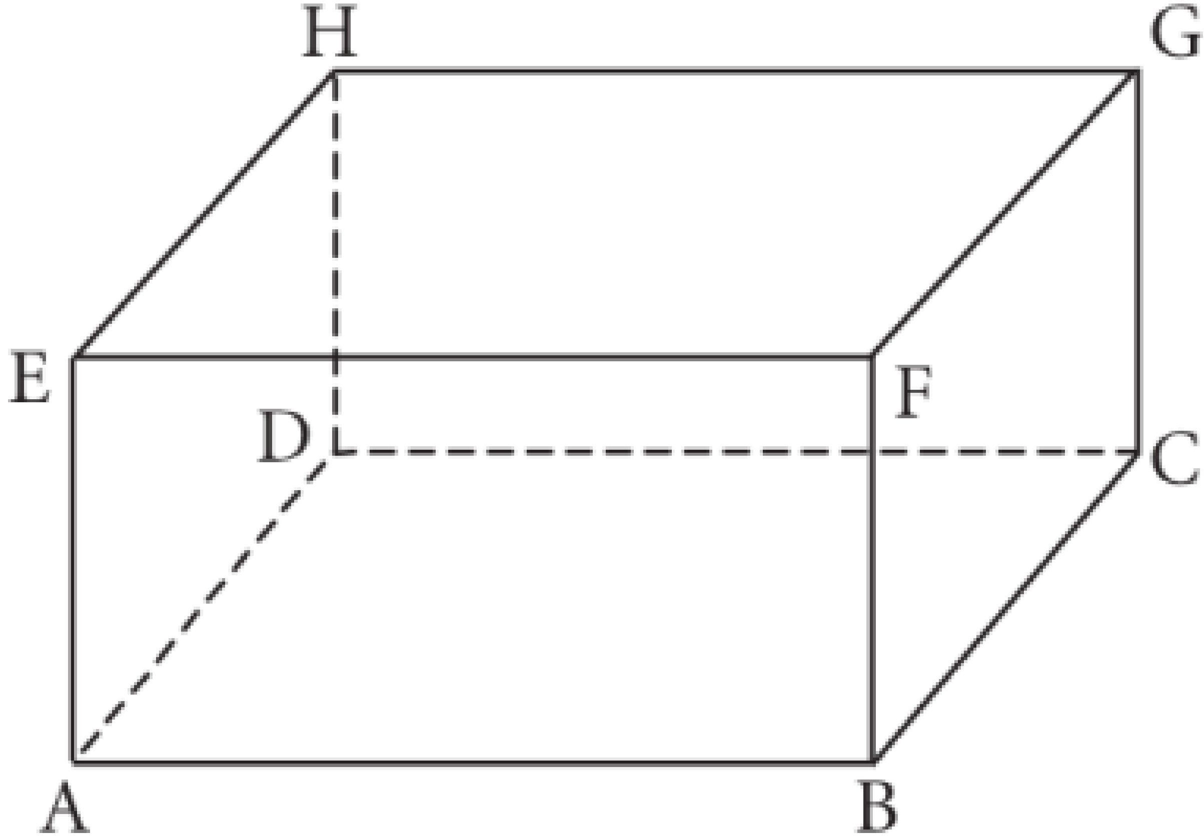
c) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$

f) $|\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{DF}|$

g) $\overrightarrow{BG} \,//\, \overrightarrow{ED}$

h) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CG}$ são coplanares





verdadeira ou falsa

k) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{FG}$ são coplanares

l) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BG}$ e $\overrightarrow{CF}$ são coplanares

m) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{CF}$ são coplanares

n) $\overrightarrow{AE}$ é ortogonal ao plano ABC

o) $\overrightarrow{AB}$ é ortogonal ao plano BCG

p) $\overrightarrow{DC}$ é paralelo ao plano HEF

OPERAÇÕES COM VETORES

Adição de vetores

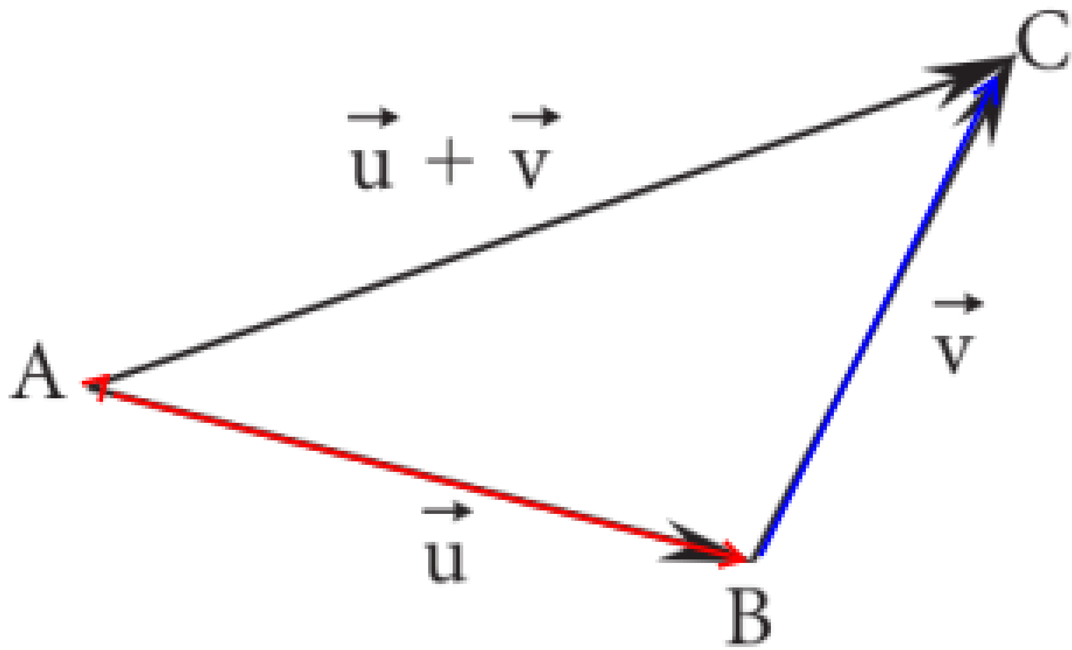


Figura 1.14

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$\vec{u} // \vec{v}$, a maneira de obter o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ é a mesma e está ilustrada na Figura 1.15(a) ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ de mesmo sentido) e na Figura 1.15(b) ($\vec{u}$ e $\vec{v}$ de sentidos contrários).

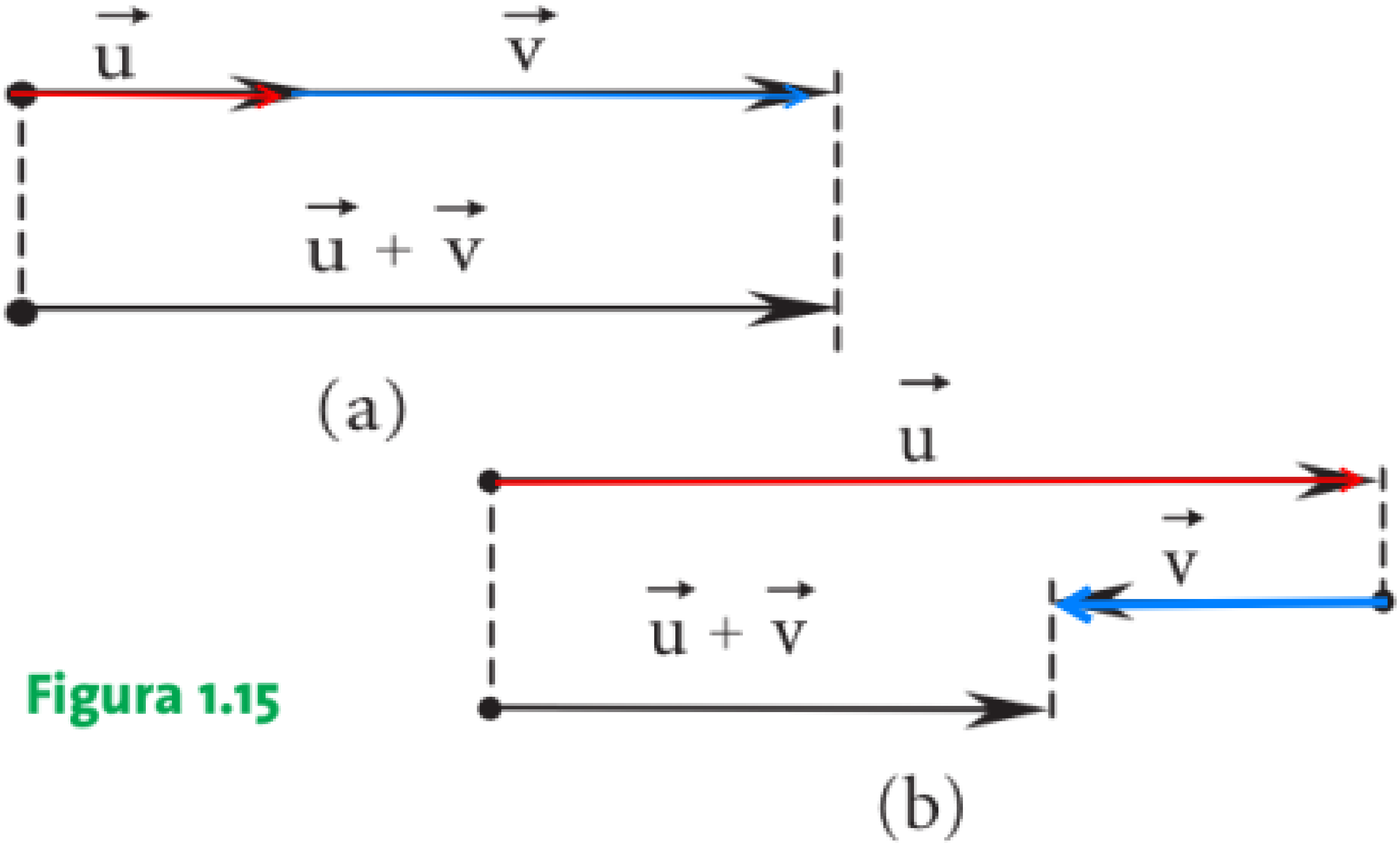


Figura 1.15

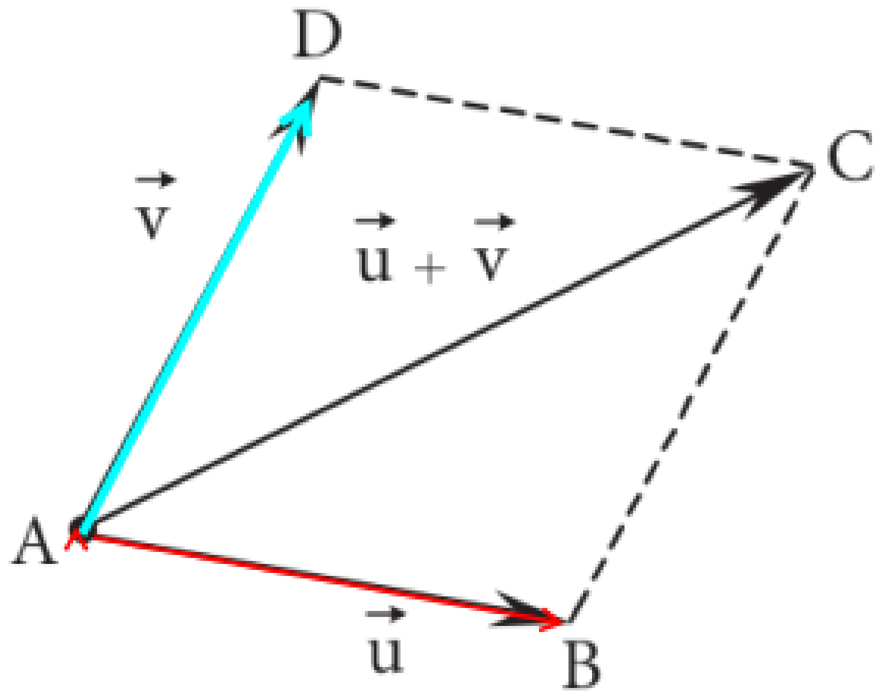
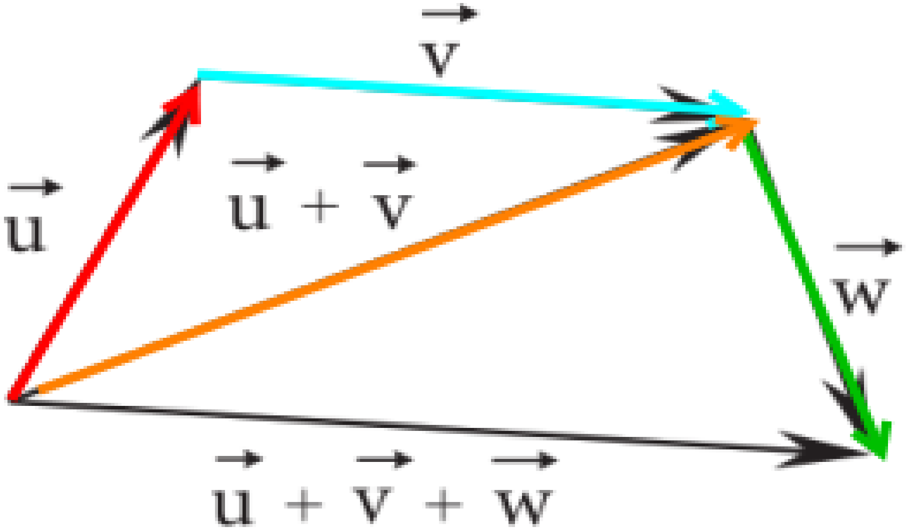


Figura 1.16

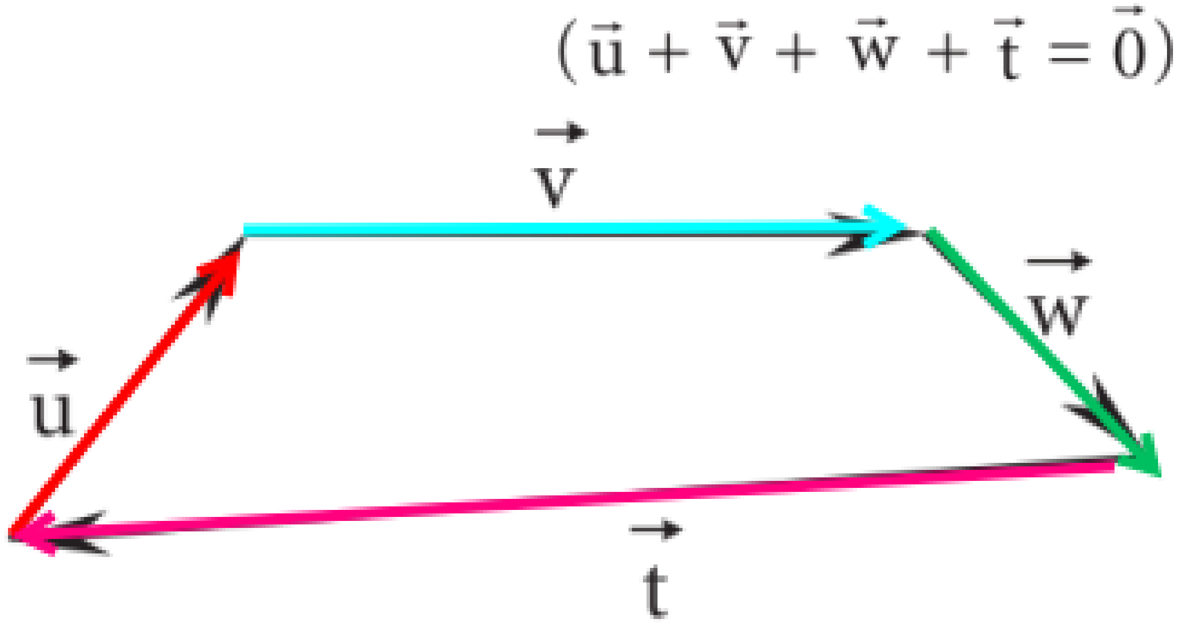
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

corresponde à diagonal do paralelogramo,



$\vec{v}$
$\vec{u}$
$\vec{u} + \vec{v}$
$\vec{w}$
$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

(a)



$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t} = \vec{0})$
$\vec{v}$
$\vec{w}$
$\vec{u}$
$\vec{t}$

(b)

propriedades:

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

III) Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

IV) Elemento oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

O vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$, escreve-se $\vec{u} - \vec{v}$, é chamado de *diferença* entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

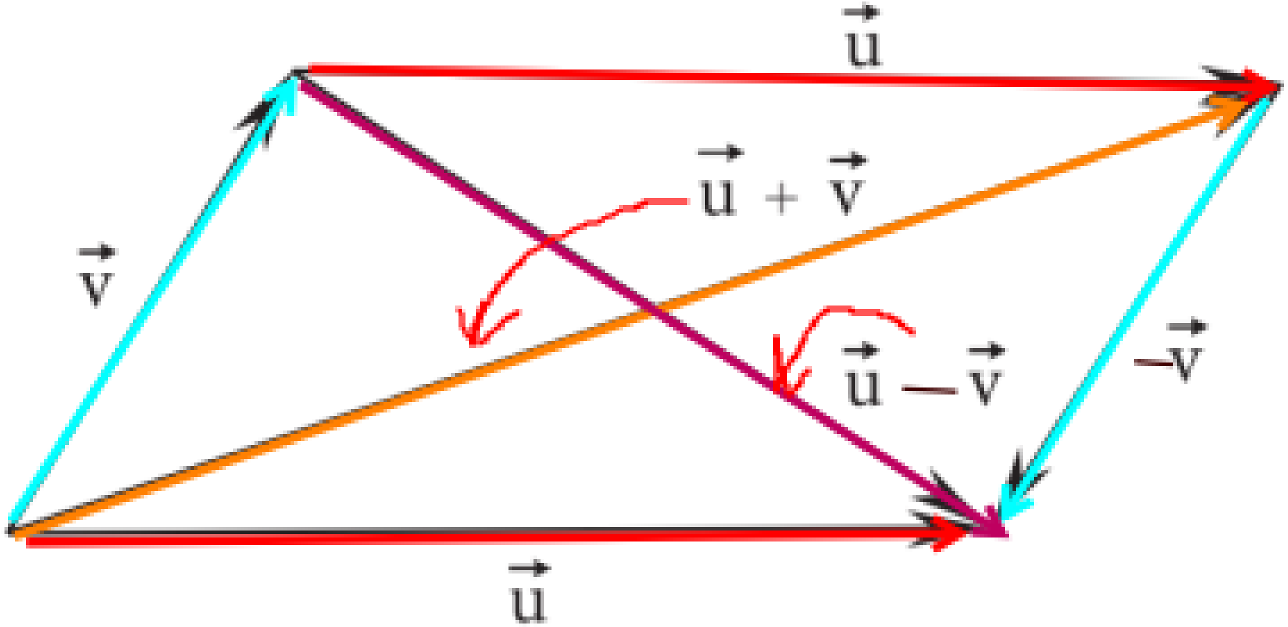
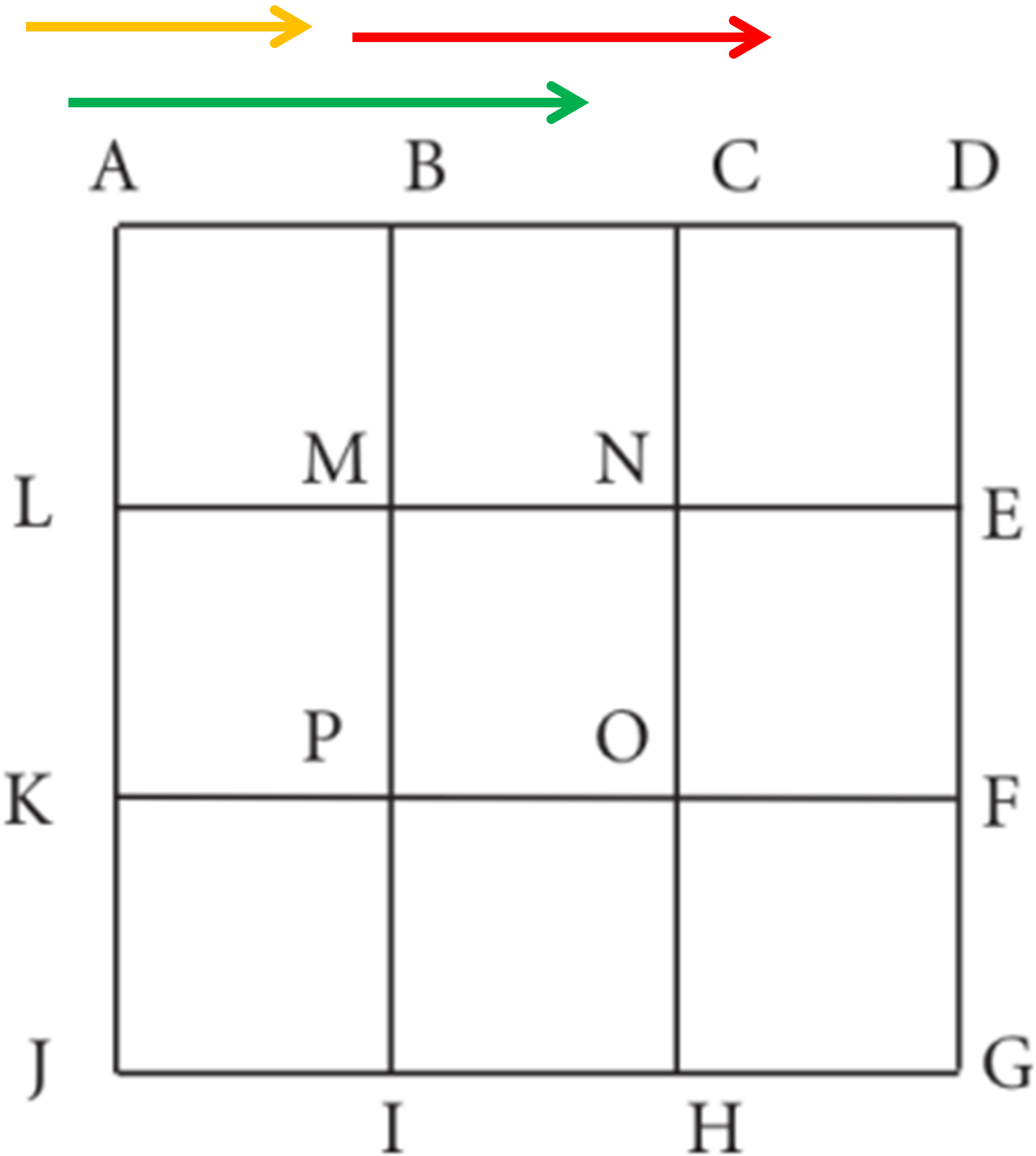


Figura 1.18

Observemos que no paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (Figura 1.18), verifica-se que a soma $\vec{u} + \vec{v}$ é representada por uma das diagonais, enquanto a diferença $\vec{u} - \vec{v}$ pela outra diagonal.



a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$

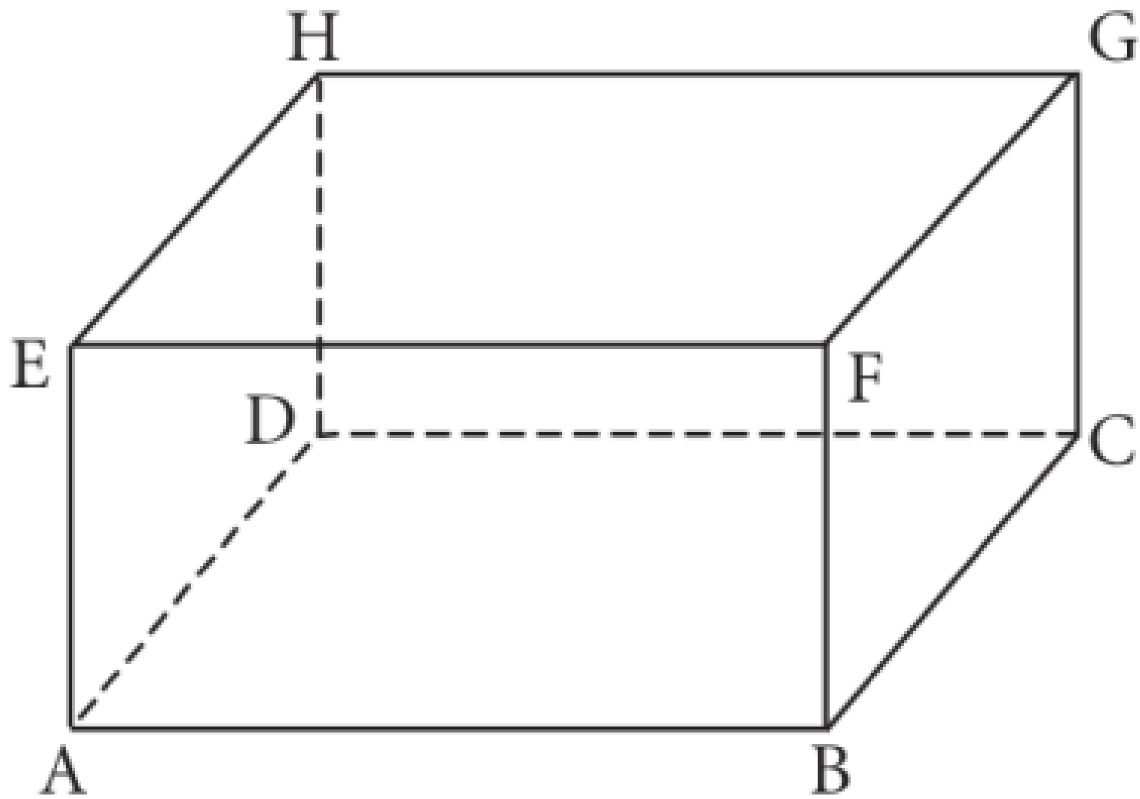
d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AK}$

i) $\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{NP}$

j) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CB}$

k) $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NF}$

l) $\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PB}$



2. Com base na Figura 1.13, determinar os vetores a seguir, expressando-os com origem no ponto A:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$

c) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EH}$

d) $\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$

f) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FB}$

g) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

h) $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FH}$

Multiplicação de número real por vetor

vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $\alpha \neq 0$, chama-se *produto do número real* α *pelo vetor* $\vec{v}$, o vetor $\alpha\vec{v}$ tal que:

a) módulo: $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$, ou seja, o comprimento $\alpha\vec{v}$ é igual ao comprimento de $\vec{v}$ multiplicado por $|\alpha|$;

b) direção: $\alpha\vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$;

c) sentido: $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido se $\alpha > 0$ e contrário se $\alpha < 0$.

Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.

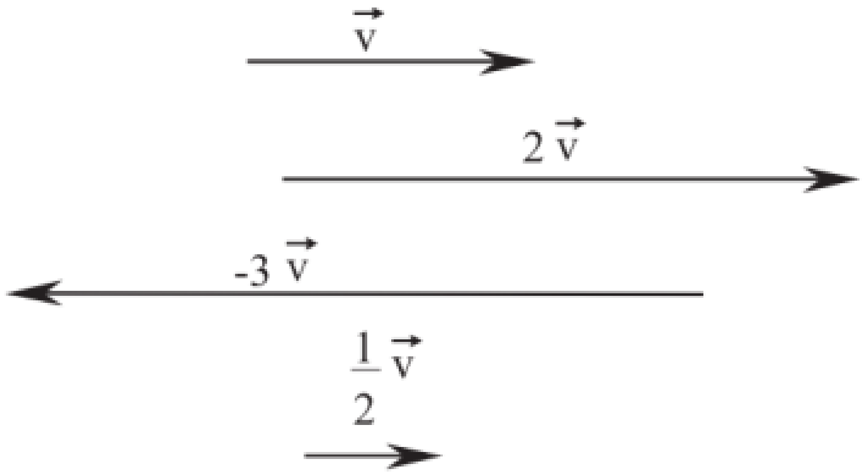


Figura 1.20

Vimos em *Casos Particulares de Vetores*, Figura 1.8, que a cada vetor $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, é possível associar dois vetores unitários paralelos a $\vec{v}$. O vetor unitário $\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ ou $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ de mesmo sentido de $\vec{v}$ é o *versor* de $\vec{v}$.

Por exemplo,

$$\text{se } |\vec{v}| = 5, \text{ o versor de } \vec{v} \text{ é } \frac{\vec{v}}{5};$$

$$\text{se } |\vec{v}| = \frac{1}{3}, \text{ o versor de } \vec{v} \text{ é } 3\vec{v};$$

$$\text{se } |\vec{v}| = 10, \text{ o versor de } -\vec{v} \text{ é } -\frac{\vec{v}}{10}.$$

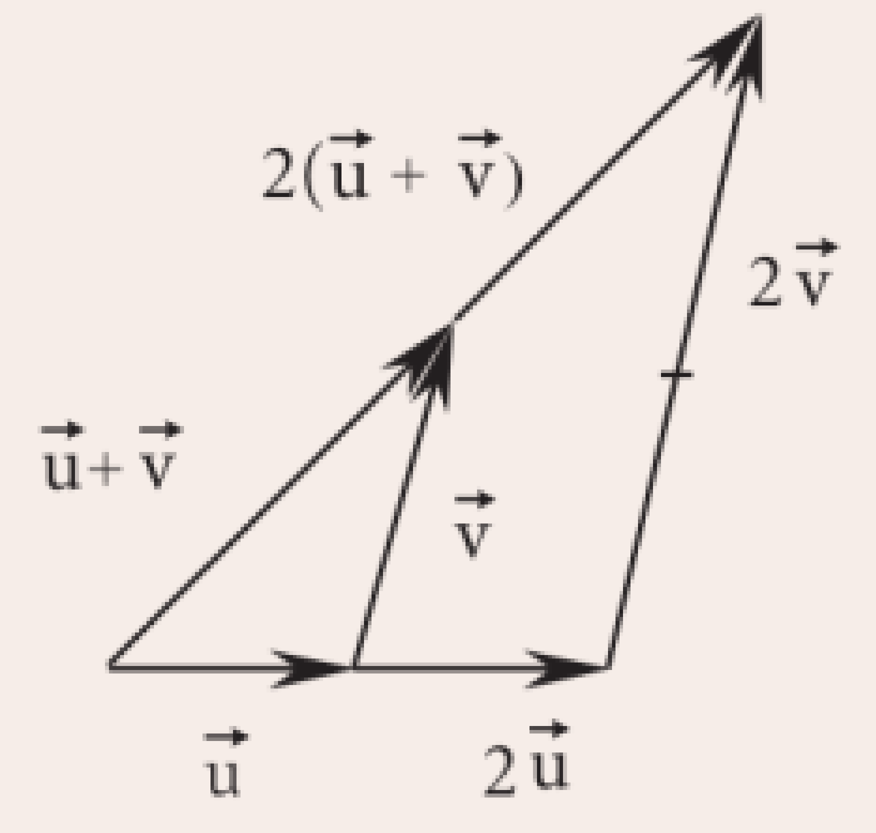
Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores quaisquer e α e β números reais, a multiplicação de número real por vetor admite as propriedades:

I) $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$

II) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

III) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

IV) $1\vec{v} = \vec{v}$



Exemplos

Representados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ como na Figura 1.25(a), obter graficamente o vetor $\vec{x}$ tal que $\vec{x} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.

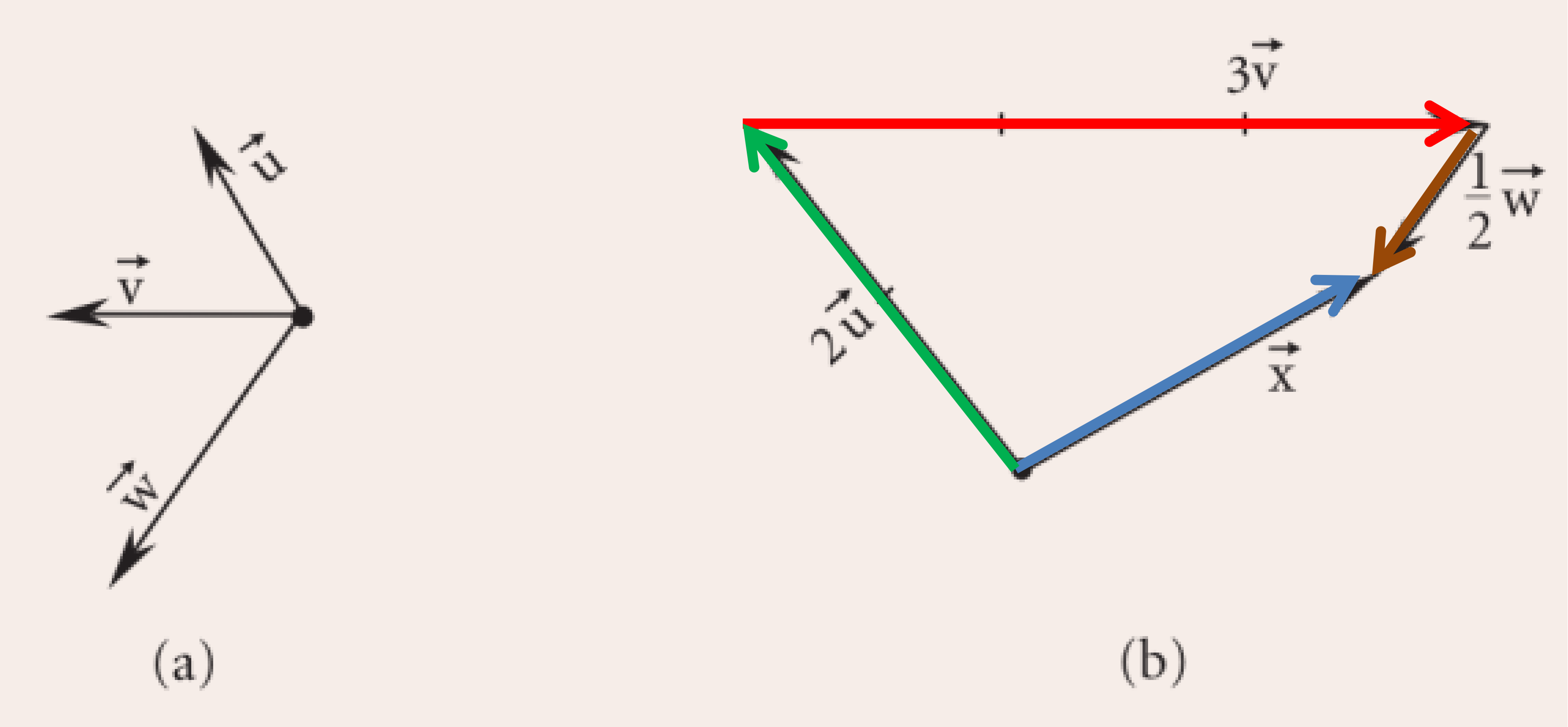


Figura 1.25

Demonstrar que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

Seja o triângulo ABC e M e N os pontos médios dos lados CA e CB, respectivamente (Figura 1.26).

Pela figura, tem-se

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Portanto, $\overrightarrow{MN}$ // $\overrightarrow{AB}$ e $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

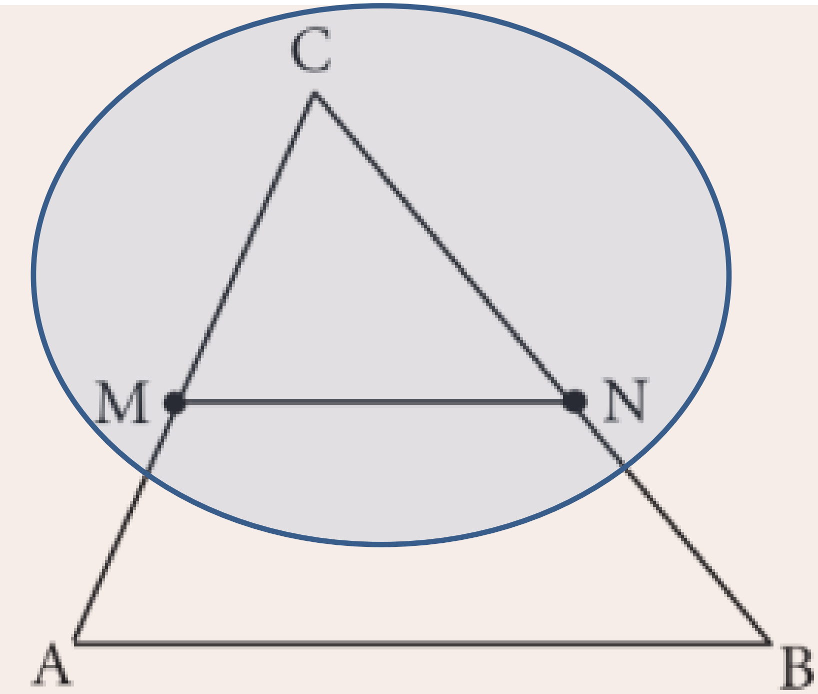


Figura 1.26

Ângulo de dois vetores

O *ângulo entre os vetores não nulos* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o ângulo θ formado por duas semirretas OA e OB de mesma origem O (Figura 1.27), na qual $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $0 \leq \theta \leq \pi$ (θ em radianos) ou $0° \leq \theta \leq 180°$.

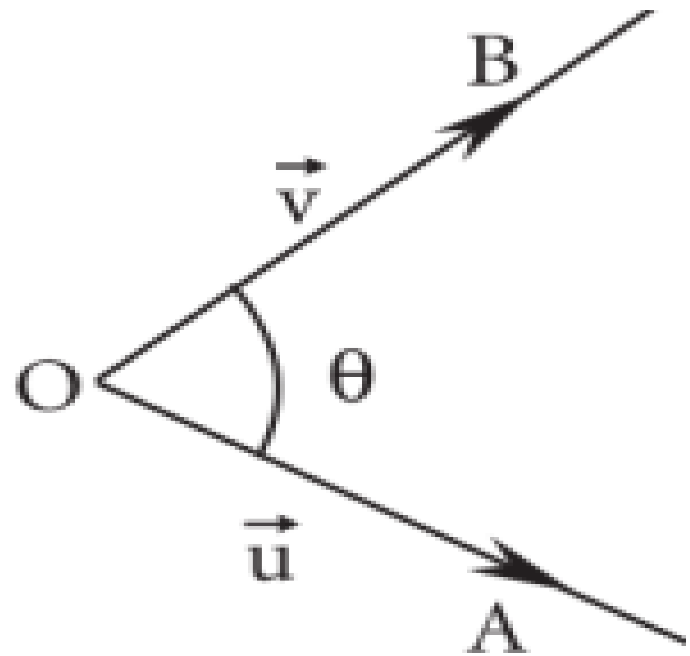
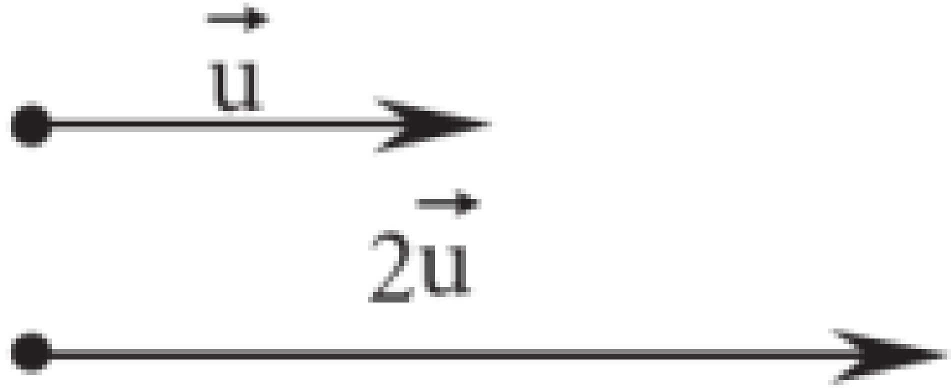


Figura 1.27

Se $\vec{u} // \vec{v}$ e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido, então $\theta = 0$.



Se $\vec{u} // \vec{v}$ e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários, então $\theta = \pi$.