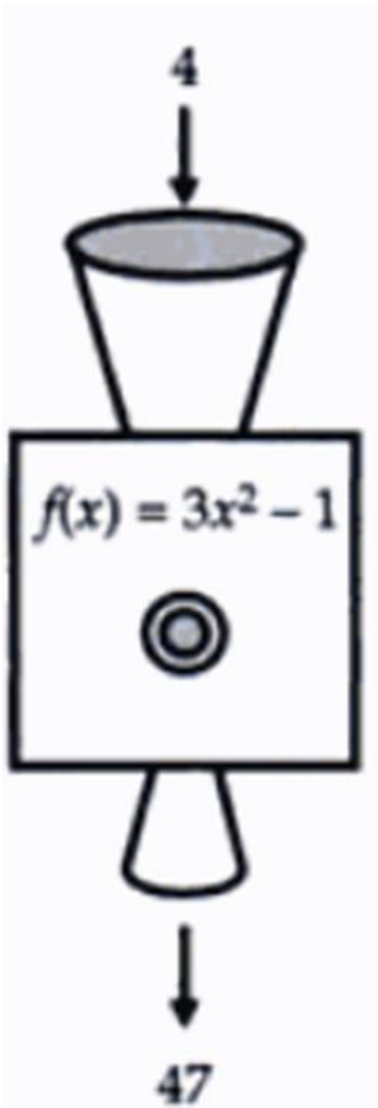
FUNÇÃO



Regra

*L*ei de Formação

Propriedade

Definição: Uma relação f é chamada função desde que $(a,b) \in f$ e $(a,c) \in f$ impliquem $b=c$.

A definição acima equivale a dizer que : uma relação f não é uma função se existem a,b,c com $(a,b) \in f$ e $(a,c) \in f$ e $b \neq c$.

Exemplos:

- (a) $f=\{(1,2),(3,4),(7,5),(4,4)\}$ é função
- (b) $g=\{(1,1),(2,2),(1,3)\}$ não é função
- (c) $h=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ é função
- (d) $k=\{(0,4),(1,4),(2,4),(4,4)\}$ é função

Notação

Os matemáticos usualmente se referem a função como $f(x)=y$ em detrimento da notação $(x,y) \in f$. Esta notação em muitos casos tem vantagens quando comparada a notação de relação.

Exemplo:

$$f=\{\ldots(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4),\ldots\}$$

$$\text{ou} \quad f=\{(x,y) \in ZxZ\text{: } y=x^2\}$$

Dominio e Imagem de uma Função

Seja f uma função. ***O conjunto de todos os primeiros elementos possíveis dos pares ordenados de f é chamado de domínio de f (Dom (f)).*** ***O conjunto de todos os segundos elementos possíveis dos pares ordenados de f se chama imagem de f (Im(f)).***

Notação:

Dom(f)={x: existe y, (x,y) $\in$ f} e Im(f)={y: existe x, (x,y) $\in$ f}

Exemplos

1. f={(1,2), (3,4), (5,4), (2,3)}

Dom(f)={1,3,5,2}, Im(f)={2,3,4}

2. g={(x,y) $\in \Re^2$: y=x^2}

Dom(g)=$\Re$, Im(g)=$\Re^+ = \{y \in \Re : y \geq 0\}$

Obs.:

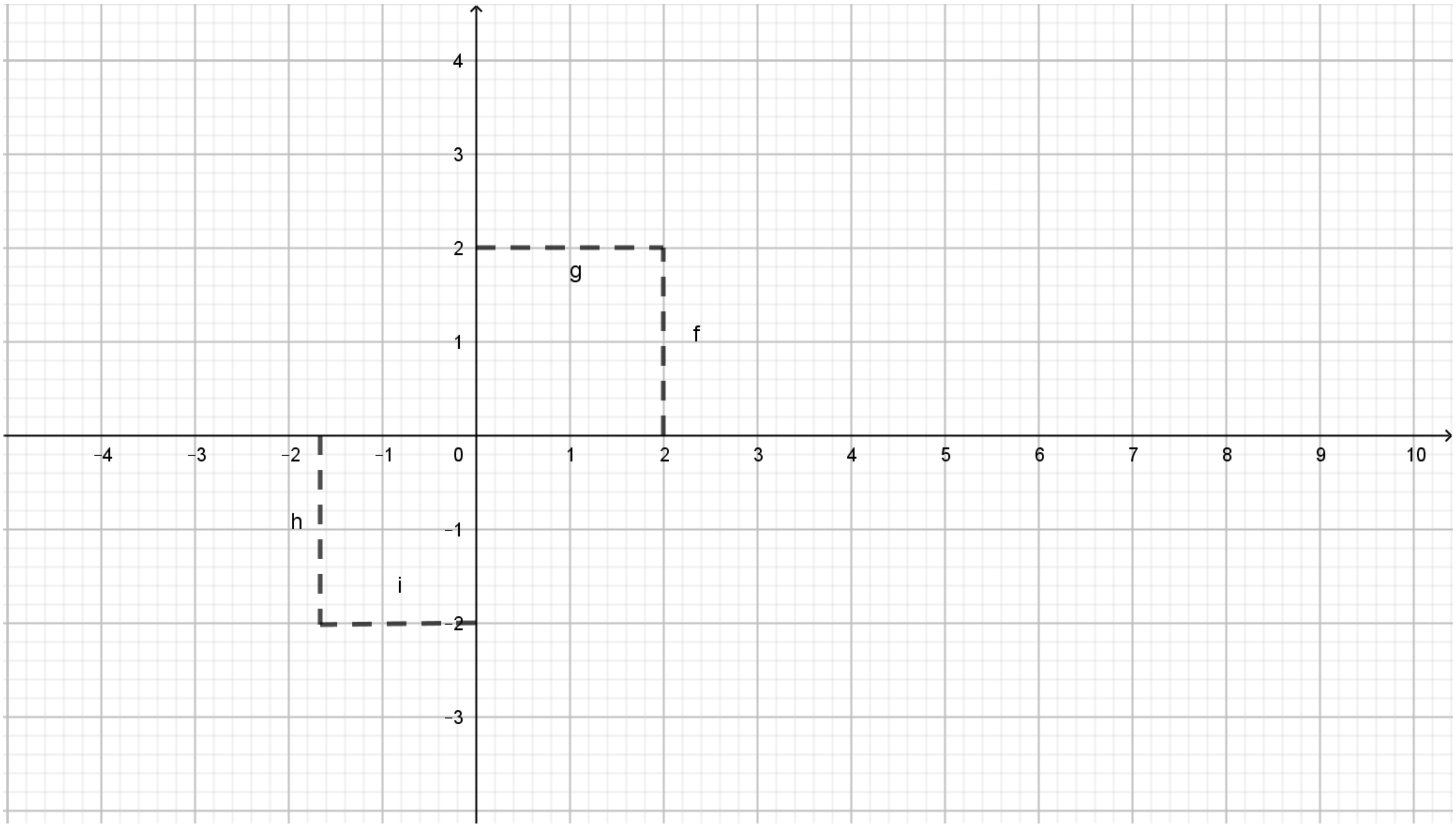
A notação f:A→B significa que "f é uma função de A para B", ie, Dom(f)=A e Im(f)⊆B.

Gráficos de funções

Seja a função f:A→B então o gráfico de f é representado no plano cartesiano.

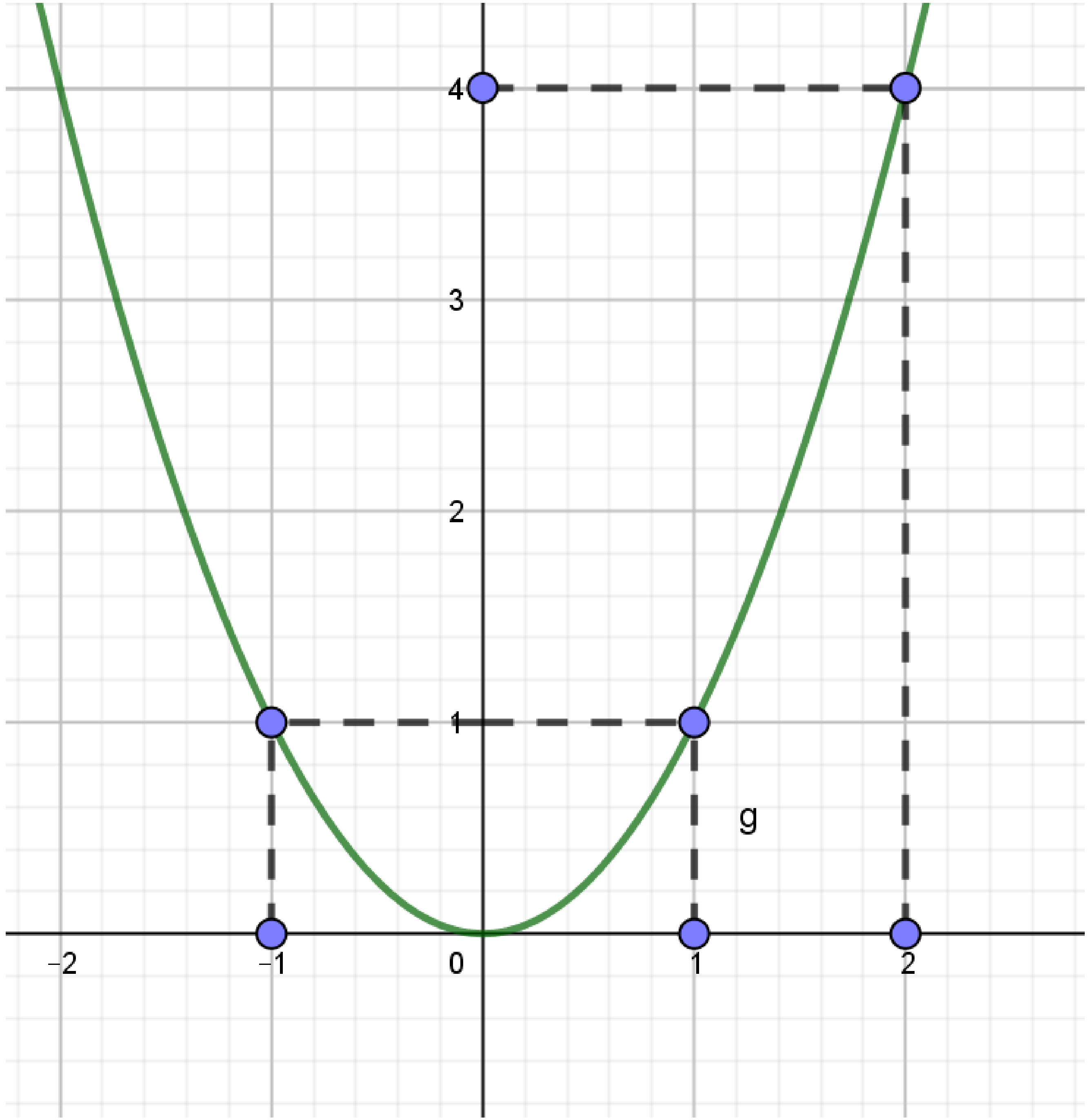
$$Graf(f) = \{(x,y) \in \Re^2 : f(x) = y\}$$

PLANO CARTESIANO



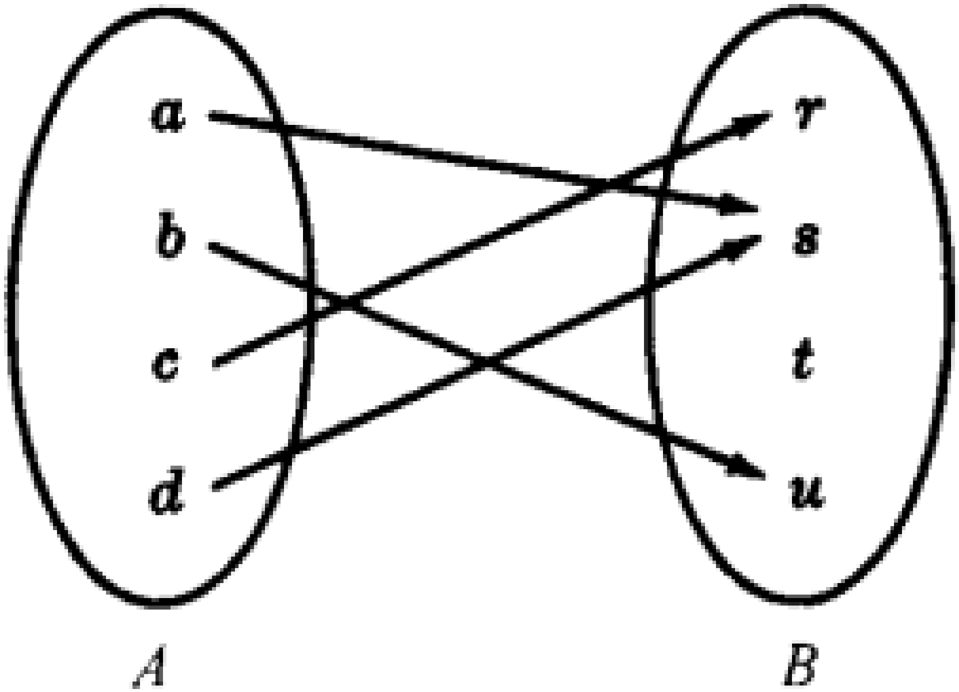
$$f(x) = x^2$$

x	$f(x)$
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5



Exemplos

$$f : A \rightarrow B$$



$$f(a) = s, \quad f(b) = u, \quad f(c) = r, \quad f(d) = s$$

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

função polinomial

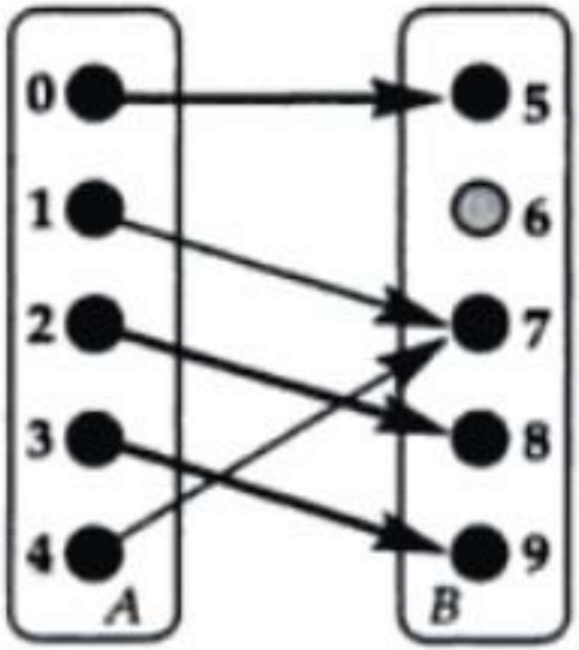
com $a_0, a_1, ..., a_n$ números reais

Algumas funções polinomiais

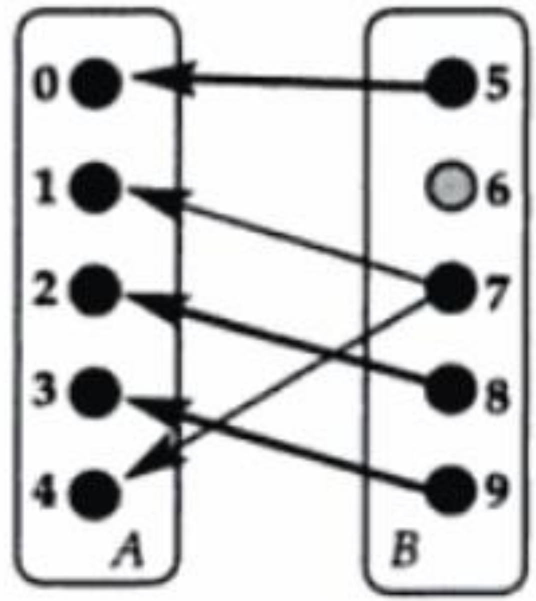
$g(x) = x^3 + 2x + 4$, $h(y) = 2y^7 + 3y^5 - y + 1$

$f(x) = 3x - 2$

Lembre que dada uma relação R obtemos a sua inversa , por exemplo:



relação R



R^{-1}

PERGUNTA:

Se f é uma função de A em B então f $^{-1}$ será uma função de B em A?

Vejamos. Seja A={1,2,3,4,5} e B={2,3,4,5} tal que:

$$f=\{(1,2), (3,4), (5,4), (2,3), (4,5)\}$$

então

$$f^{-1}=\{(2,1),(4,3),(4,5),(3,2),(5,4)\}$$

não é função

<u>**Função Injetora**</u>

- Uma função f é dita *um a um* ou *injetora* se dados $a,b \in Dom(f)$ então $f(a) \neq f(b)$.
- Equivalentemente, uma função f é dita um a um ou injetora se $f(a)=f(b)$ então $a=b$.

Proposição 1: Seja f uma função. A relação inversa f^{-1} é uma função se, e somente se, f é injetora.

Proposição 2: Sejam f e f^{-1} funções. Então $Dom(f)=Im(f^{-1})$ e $Im(f)=Dom(f^{-1})$.

Função Sobrejetora

Uma função $f:A \to B$ é dita *sobrejetora* se para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x)=y$. Em outras palavras $Im(f)=B$.

Exemplos: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$

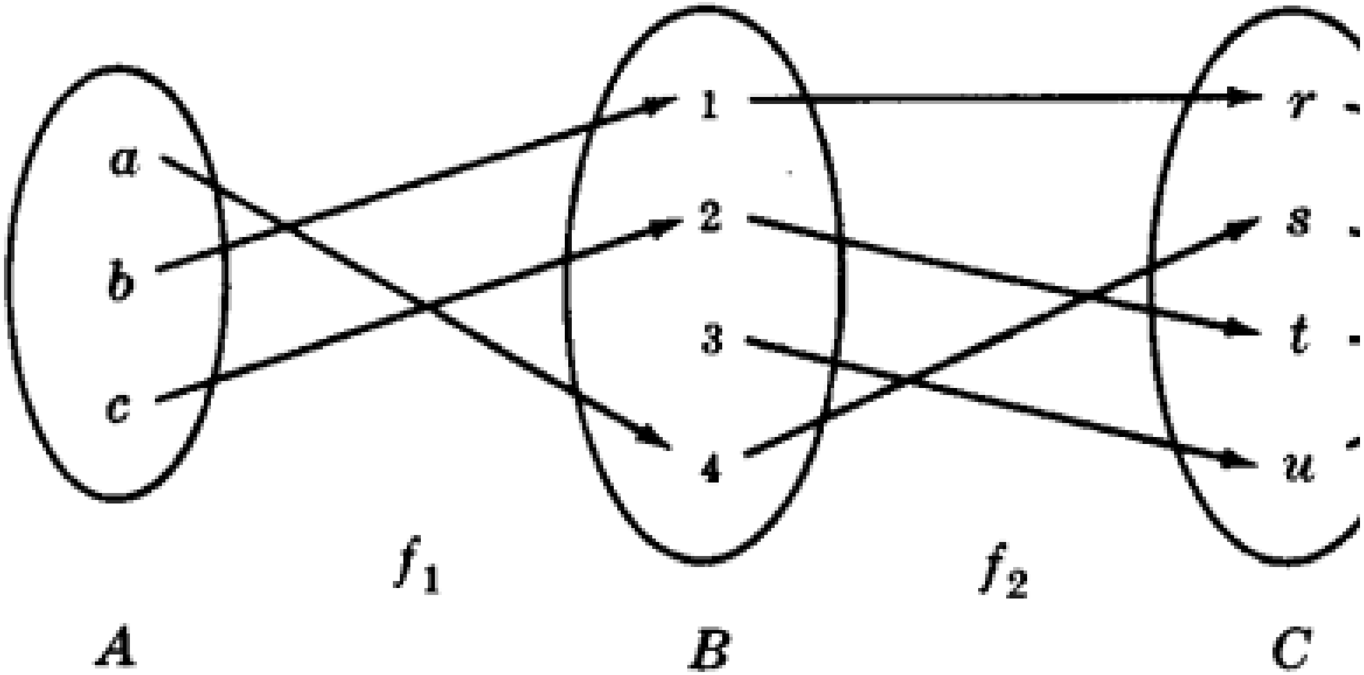
1. $f=\{(1,2), (3,4), (2,3)\}$ é sobrejetora.

2. $f=\{(1,2), (3,4), (2,4)\}$ não é sobrejetora *pois* $4 \notin \mathrm{Im}(f)$.

Obs.: Quando uma função é ***injetora*** e ***sobrejetora*** dizemos que esta função é ***bijetora***.

Seja a função $f:A \rightarrow B$ bijetora e A, B conjuntos finitos. Então o número de elementos de A é igual ao número de elementos de B (Notação: $n(A)=n(B)$).

$$f_1 : A \to B,\ f_2 : B \to C$$

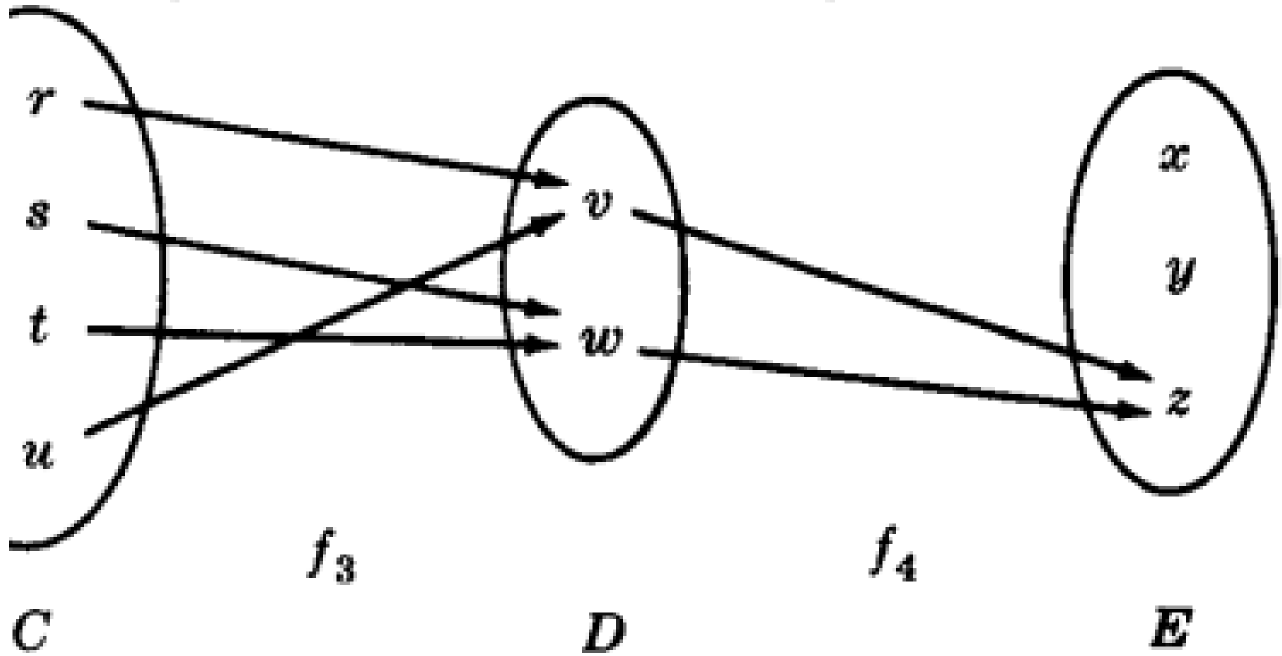


f_1 e f_2 são funções injetoras

f_1 não é sobrejetora,pois, $3 \notin \mathrm{Im}(f_1)$

f_2 é bijetora

$f_3: C \rightarrow D$ and $f_4: D \rightarrow E$



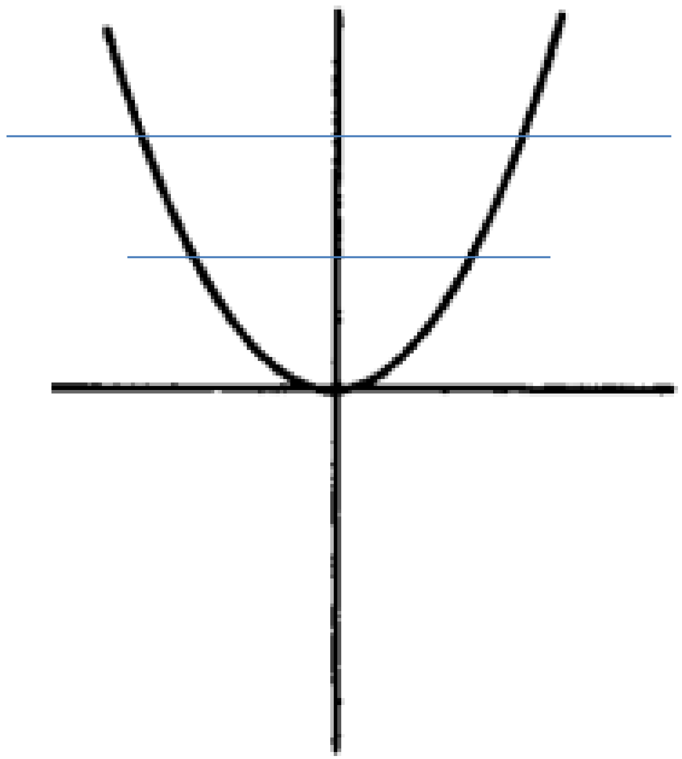
f_3 não é função injetora, pois, $f_3(s)=f_3(t)$

f_3 é sobrejetora

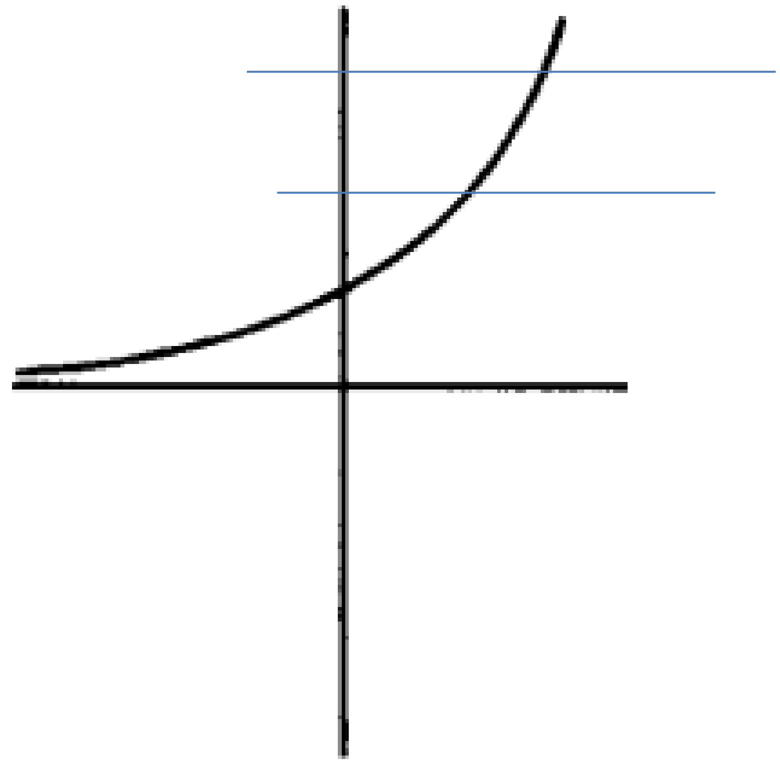
f_4 não é função injetora, pois, $f_4(v)=f_4(w)$

f_4 não é função sobrejetora, pois, $x \notin Im(f_4)$

Reconhecendo funções injetoras graficamente



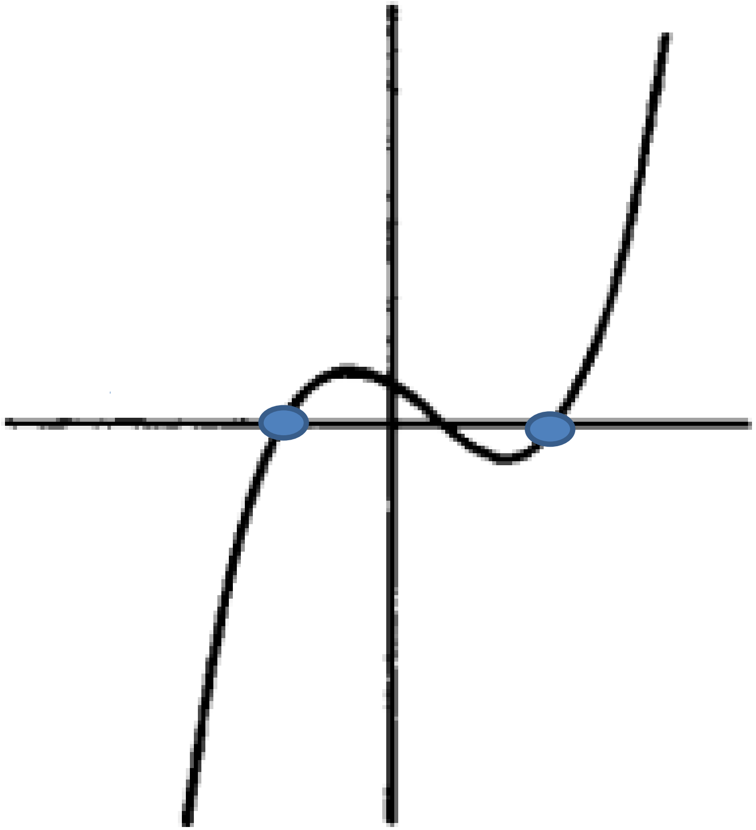
$f_1(x) = x^2$



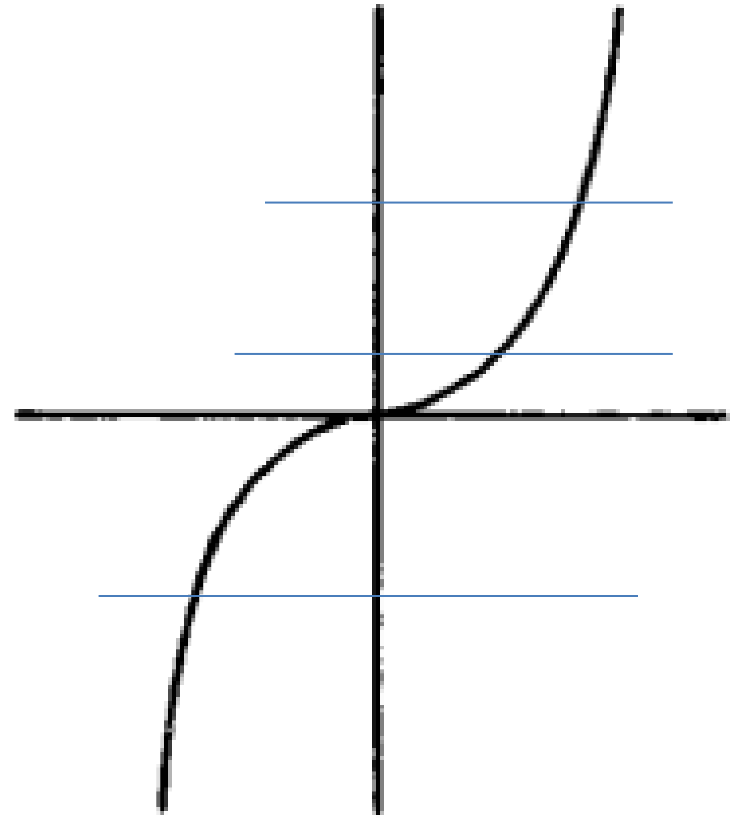
$f_2(x) = 2^x$

f1 não é injetora

f_2 é injetora



$$f_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$



$$f_4(x) = x^3$$

f_3 não é injetora

f_4 é injetora

Composição de Funções

Sejam as funções $f:A \to B$ e $g:B \to C$ tal que $Im(f)=Dom(g)$. Definimos a nova função gof (composição de f e g) como:

$$(gof)(a)=g(f(a))$$

Exemplo: Dados A={a,b,c}, B={x,y,z}, C={r,s,t} e f:A $\rightarrow$ B e g:B $\rightarrow$ C definidas por f={(a,y),(b,x),(c,y)} e f={(x,s),(y,t),(z,r)}. Encontre gof, Im(f), Im(g) e Im(gof).

SOLUÇÃO

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = t$$
$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(x) = s$$
$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = t$$

$$g \circ f = \{(a, t), (b, s), (c, t)\}.$$

$$\mathrm{Im}(f) = \{x, y\}, \quad \mathrm{Im}(g) = \{r, s, t\}, \quad \mathrm{Im}(g \circ f) = \{s, t\}$$

Funções matemáticas

INT: $\Re \rightarrow Z$ tal que INT(x) converte x em um número inteiro deletando sua parte fracionária.

IINT(3.5)=3, INT($\sqrt{5}$) $= 2$, INT(-8.5)= -8.

$$| \; | : \Re \rightarrow \Re$$

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}, \quad |-3| = 3, \ |6| = 6, \ |-4| = 4.$$

$\lfloor x \rfloor$ denota o mair inteiro que não excede x

$\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro que não é menor que x

Exemplos:

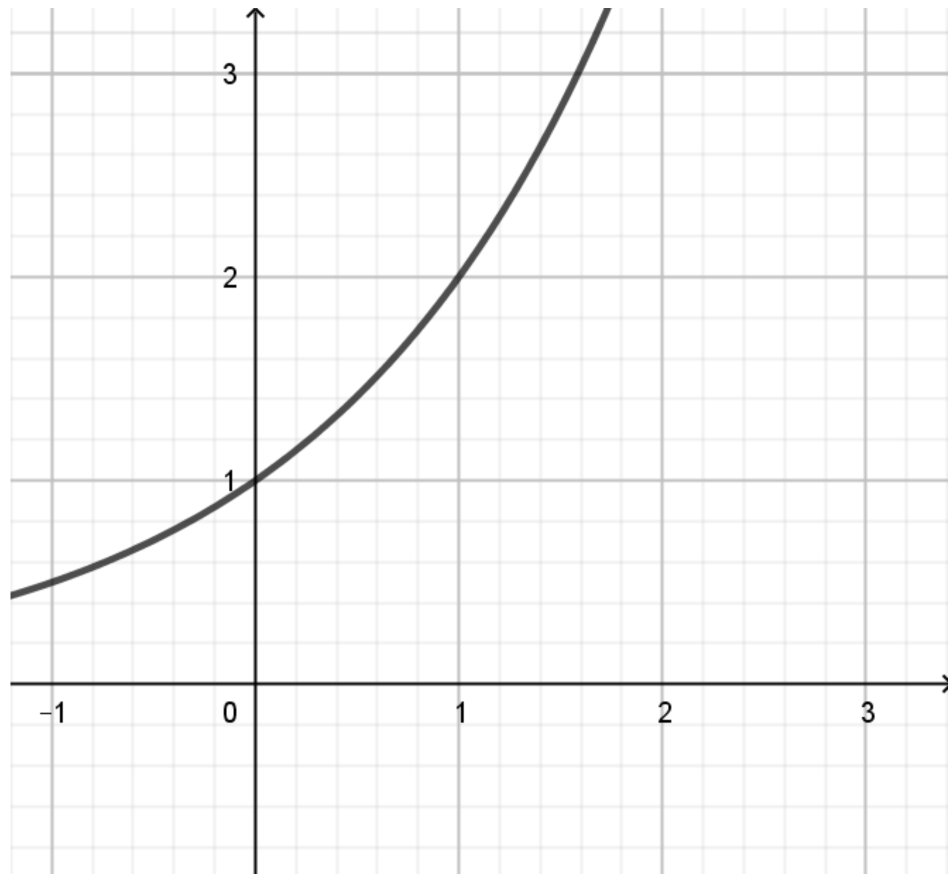
$\lfloor 32 \rfloor = 32$ $\lfloor -3 \rfloor = -3$ $\lfloor -2.5 \rfloor = -2$ $\lfloor -9.5 \rfloor = -9$

$\lceil 32 \rceil = 32$ $\lceil -3 \rceil = -3$ $\lceil -2.5 \rceil = -3$ $\lceil -9.5 \rceil = -9$

Função exponencial: f(x)=a^x

$$Lembre: \ a^m = a \bullet a \bullet a ... \bullet a (m \ vezes), a^0 = 1, \ a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, a^x = \lim_{r \to x} a^r$$, r número racional.



f(x)=2^x

Função Logaritmica

Seja b um número inteiro positivo. O logaritmo de qualquer número positivo x na base b é denotado

$$\log_b x$$

Assim,

$$\log_b x = y \quad \textit{see} \quad b^y = x.$$

Exemplos:

$$\log_2 8 = 3 \qquad \qquad 2^3 = 8;$$

$$\textit{see}$$

$$\log_2 64 = 6 \qquad \qquad 2^6 = 64$$

$$\log_{10} 100 = 2 \qquad \textit{see} \qquad 10^2 = 100$$

$$\log_{10} 0.001 = -3 \qquad\qquad 10^{-3} = 0.001$$

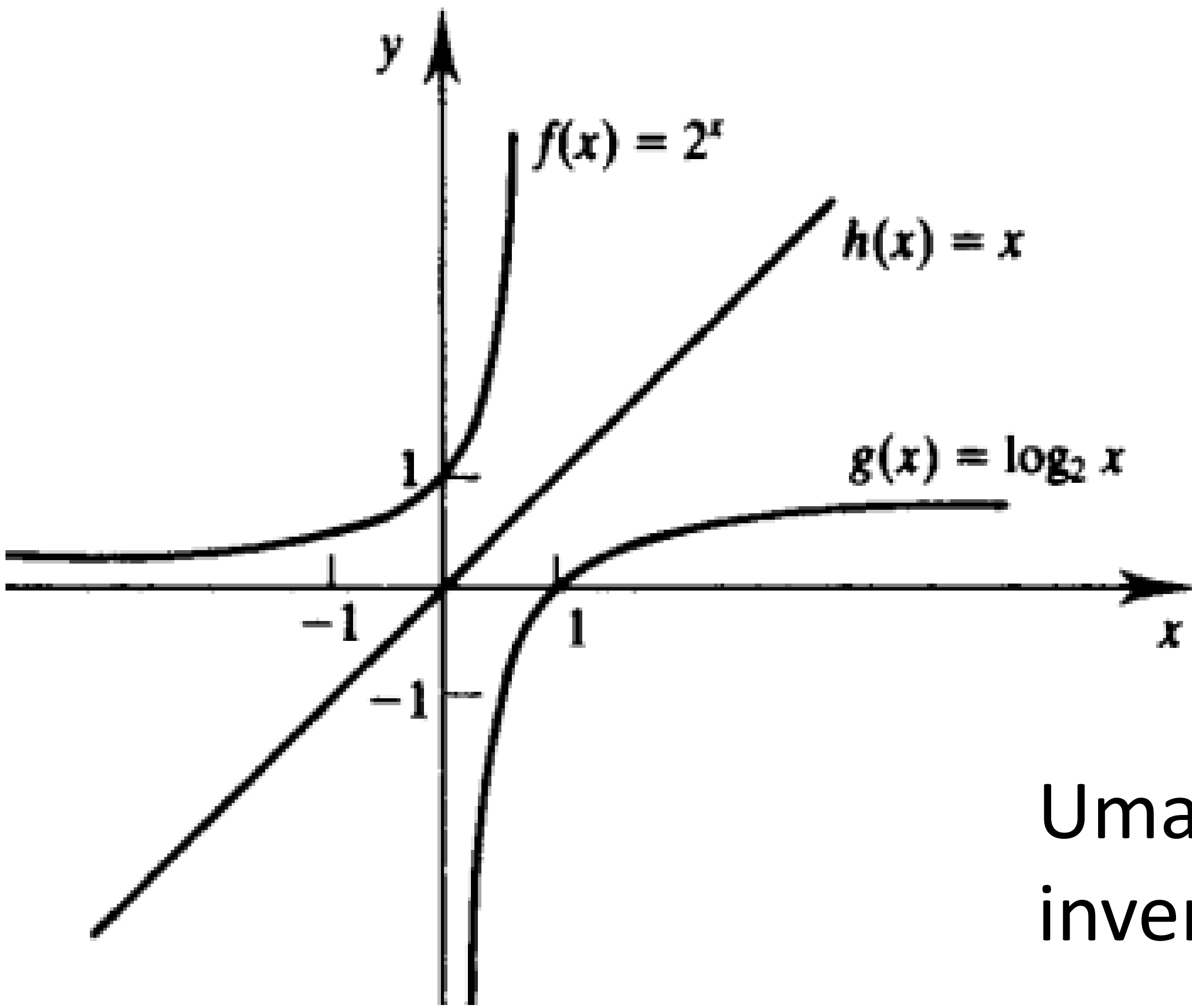
$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

<u>OBS.:</u>

O logaritmo de um número negativo e o logaritmo de zero não estão definidos.

Relação entre as funções exponencial e logaritmica



Uma função é inversa da outra

Princípio da Casa de Pombo: Seja a função $f:A \to B$ com A e B conjuntos finitos.

(a)Se $n(A)>n(B)$ então f não é injetora.

(b) SE $n(A)<n(B)$ então f não é sobrejetora.