Introdução à Teoria dos Conjuntos

Ao começarmos a falar sobre conjuntos, o primeiro passo deveria ser tentar caracterizá-los de um modo preciso. Mas é naturalmente muito difícil dar uma *definição* de conjunto; o máximo que podemos fazer é tentar uma caracterização intuitiva. A idéia básica é de que conjuntos são *coleções* de objetos. (Outros termos usados são 'classe', 'agregado', e 'totalidade'.) Uma tal caracterização, obviamente, é imprecisa: a idéia de coleção parece implicar que os elementos dessa coleção devam estar de alguma forma fisicamente próximos, ou que tenham alguma coisa em comum. Isso, contudo, não é absolutamente exigido dos elementos de um conjunto — até porque temos, por exemplo, conjuntos infinitos, onde fica difícil falar de proximidade.

Essa idéia intuitiva, contudo, deixa claro que conjuntos são formados por objetos, os quais designamos pela expressão *elementos*. Entre esses elementos, podemos ter também outros conjuntos. Para indicar que um objeto é um elemento de um conjunto, vamos utilizar o símbolo $\in$. Assim, se a letra F designa o conjunto dos filósofos, e a letra s denota Sócrates, podemos representar a sentença 'Sócrates é um filósofo' da seguinte forma:

$$s \in F.$$

No caso negativo — ou seja, quando quisermos dizer, por exemplo, que Sócrates *não pertence* ao conjunto dos filósofos — escrevemos

$$s \notin F.$$

Como vamos representar os conjuntos? Por exemplo, como representar o conjunto formado pelos indivíduos Pedro, Paulo e Maria? Ou o conjunto dos estudantes de filosofia da UFSC? Há pelo menos duas maneiras de fazer isso:

Enumeração: $\{\text{Pedro}, \text{Paulo}, \text{Maria}\}$,

Na enumeração, fazemos uma listagem de todos os elementos do conjunto. Isso só pode ser feito, contudo, com conjuntos que tenham um número pequeno de elementos, como o conjunto descrito acima, ou que tenham alguma "lei de geração" facilmente reconhecida, como por exemplo o conjunto dos números pares

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}.$$

Descrição: $\{x \mid x$ é um estudante de filosofia da UFSC$\}$.

Não se aplicando nenhum desses casos, a solução é fazer uma descrição do conjunto, o que se consegue por meio de uma *propriedade* comum aos elementos do conjunto, e só a eles, como no caso acima dos estudantes de filosofia da UFSC.

Exercício 4.1 Expressar em símbolos:

(a) b é um elemento de A

(b) k não é um elemento de B

(c) o conjunto consistindo nos elementos a, b e c

(d) b é um elemento do conjunto consistindo nos elementos a, b e c

(e) o conjunto $\{b\}$ é um elemento do conjunto consistindo nos elementos a, c, e no conjunto $\{b\}$

Alguns conjuntos merecem consideração à parte. Por exemplo, dada a propriedade 'x é diferente de si mesmo', podemos formar o seguinte conjunto:

$$\{x \mid x \text{ é diferente de } x\}.$$

Como, obviamente, não há um indivíduo que seja diferente de si próprio, o conjunto acima definido não tem elementos: é o chamado *conjunto vazio*, que denotaremos pelo símbolo $\varnothing$. Analogamente, há o conjunto dos x que são idênticos a si mesmos: isto inclui todos os objetos do universo. Temos neste caso, portanto, o *conjunto universo*, que podemos denotar por U.

É preciso aqui fazer um comentário a respeito do assim chamado "universo". Na verdade, não existe um conjunto *universal*, contendo *todas* as entidades do universo — o qual incluiria os outros conjuntos e também a si mesmo. (Ver observações a respeito ao final deste capítulo.) Assim, ao falarmos de 'conjunto universo', queremos com isso indicar apenas o conjunto das entidades que nos interessa estudar num certo momento: o *universo de discurso* de uma certa situação. Por exemplo, se tudo sobre o que estamos falando são gambás e quatis, então o conjunto universo U, neste momento, seria:

$$U = \{x \mid x \text{ é um gambá ou } x \text{ é um quati}\},$$

o que exclui, então, as pessoas, as estrelas, e assim por diante. Numa aula de matemática, o universo incluiria, digamos, todos os números, e apenas eles. Resumindo, o assim chamado conjunto universo é sempre relativo a uma situação específica.

Exercício 4.2 Há alguma diferença entre Salma Hayek e {Salma Hayek}? E entre os conjuntos $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$?

Voltando a falar do conjunto vazio, até agora estive me referindo *ao* conjunto vazio; mas será que podemos afirmar que há apenas *um* conjunto vazio? Sim; isto é garantido pelo chamado *Princípio de Extensionalidade*, que poderia ser formulado da seguinte maneira: se temos dois conjuntos, A e B, com exatamente os mesmos elementos, então se trata do mesmo conjunto, e não de conjuntos diferentes. Ou seja, $A = B$. Em outras palavras, para um conjunto A ser diferente de um conjunto B, é preciso que haja pelo menos um elemento em A que não esteja em B, ou vice-versa. Dessa forma, só há *um* conjunto vazio: se houvesse dois candidatos distintos, um deles teria de conter um elemento que não se encontrasse no outro. Por definição, contudo, o conjunto vazio não contém nenhum elemento.

O princípio de extensionalidade nos permite definir uma relação entre conjuntos: a relação de *inclusão*. Se cada elemento de um conjunto A for também elemento de um outro conjunto B, dizemos que A *está contido em* B, ou que A *é um subconjunto de* B, e representamos esse fato da seguinte maneira:

$$A \subseteq B.$$

Isso pode ser traduzido pela expressão 'Todo (elemento de) A é (elemento de) B'. Note que, mesmo que A e B sejam o mesmo conjunto, ainda é verdadeiro que $A \subseteq B$.

Podemos definir, contudo, uma relação de *inclusão própria* entre dois conjuntos:[1]

$$A \subset B =_{df} A \subseteq B \text{ e } A \neq B.$$

Neste caso, dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B, ou que A *está propriamente contido em* B.

E, claro, quando A e B têm exatamente os mesmos elementos, eles são o mesmo conjunto, o que representamos escrevendo que

$$A = B,$$

como vimos acima.

Proposição 4.1 *Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então:*

(a) $\varnothing \subseteq A$;

(b) $A \subseteq A$;

(c) *se* $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ *então* $A \subseteq C$;

(d) *se* $A \subseteq B$ *e* $B \subseteq A$ *então* $A = B$;

(e) *se* $A \subset B$ *então* $A \neq B$.

Prova. É fácil ver que a propriedade (a), por exemplo, deve ser verdadeira. Suponhamos que não seja o caso que $\varnothing \subseteq A$. Então deve existir algum elemento $a \in \varnothing$ e $a \notin A$. Mas é impossível que tenhamos algum $a \in \varnothing$, pois o vazio não tem elementos. Logo, $\varnothing \subseteq A$.

Vamos agora considerar (c). Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Por definição, todo elemento de A pertence a B, e todo elemento de B pertence a C. É imediato, então, que qualquer elemento de A é também elemento de C. Logo, $A \subseteq C$.

Operações sobre conjuntos

Uma outra maneira de caracterizar conjuntos, além de enumeração ou descrição, é gerá-los através de algumas operações. Por exemplo, dados dois conjuntos A e B, podemos formar o *conjunto união* de A e B, que denotaremos por

$$A \cup B.$$

Por definição, o conjunto $A \cup B$ contém todos os elementos que são ou elementos de A ou elementos de B. Ou seja:

$$A \cup B =_{df} \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Uma outra operação é a de *intersecção*: um elemento x pertence à intersecção de A e B se x pertence tanto a A quanto a B. Ou seja, a intersecção de dois conjuntos é o conjunto que contém os *elementos comuns* aos dois. Em símbolos, $A \cap B$, o que podemos definir da seguinte maneira:

$$A \cap B =_{\mathrm{df}} \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Ainda uma terceira operação é a de *complemento*: dado um universo U, e um conjunto A contido em U, o complemento de A, em símbolos $\overline{A}$, é o conjunto de todos os elementos que não pertencem a A. Ou seja:

$$\overline{A} =_{df} \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}.$$

Além das operações de união, intersecção e complemento, temos ainda a *diferença* entre conjuntos, que representamos por $A - B$. Um elemento x pertence ao conjunto $A - B$ se x pertence a A, mas não a B. Podemos definir isto da seguinte maneira:

$$A - B =_{\mathrm{df}} \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Analogamente, $B - A$ consiste em todos os elementos de B que não estão em A.

Dado um conjunto A, podemos também formar o *conjunto potência* de A (ou conjunto das *partes* de A), que corresponde ao conjunto de todos os subconjuntos de A, e que denotaremos por $\mathcal{P}(A)$. Podemos defini-lo assim:

$$\mathcal{P}(A) =_{\text{df}} \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Por exemplo, se $A = \{1, 2\}$, temos que

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

De um modo geral, se um conjunto A tem n elementos, $\mathcal{P}(A)$ terá 2^n elementos. Seja $B = \{0, 1, 2\}$. Então $\mathcal{P}(B)$ tem 8 elementos, a saber:

$$\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

Gostaria de enfatizar que pares ordenados são um tipo particular de conjunto. E se você está imaginando como é que vamos obter a idéia de ordem a partir de conjuntos (que não têm ordem), o pequeno truque a seguir resolve a questão. Podemos definir um par ordenado $\langle x, y \rangle$ da seguinte maneira:

$$\langle x, y \rangle =_{df} \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

É fácil ver, a partir dessa definição, que o par $\langle a,b \rangle$, por exemplo, é mesmo diferente de $\langle b,a \rangle$. Pela definição, temos que

$$\langle a,b \rangle = \{\{a\},\{a,b\}\},$$

e que

$$\langle b,a \rangle = \{\{b\},\{b,a\}\}.$$

Obviamente, $\{\{a\},\{a,b\}\}$ é diferente de $\{\{b\},\{b,a\}\}$.

Obviamente,

A noção de par ordenado pode ser ainda generalizada: é assim que podemos falar de *triplas ordenadas*, que são conjuntos de três elementos com uma ordem, por exemplo, as triplas $\langle a,b,c\rangle$ e $\langle b,c,a\rangle$, que, naturalmente, são diferentes. De modo análogo, temos as *quádruplas ordenadas*, e, no caso geral, seqüências ordenadas $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ de n elementos — as *n-uplas*, ou *ênuplas*. Uma tripla ordenada $\langle x,y,z\rangle$ pode ser definida a partir de um par ordenado, o par $\langle x,\langle y,z\rangle\rangle$ — e assim por diante.

por diante.

Agora, o produto cartesiano de dois conjuntos A e B, que denotamos por $A \times B$, é simplesmente o conjunto dos pares ordenados $\langle x, y \rangle$, onde $x \in A$ e $y \in B$. Ou seja:

$$A \times B =_{df} \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Para dar um exemplo, se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b\}$, o produto cartesiano é

$$A \times B = \{\langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle\}.$$

O produto cartesiano pode ainda ser generalizado para mais conjuntos: $A \times B \times C$ será, assim, um conjunto de triplas ordenadas, com o primeiro elemento de A, o segundo de B e o terceiro de C. No caso geral, o produto de n conjuntos, naturalmente, será um conjunto de ênuplas.

Você pode também fazer o produto cartesiano de um conjunto por ele mesmo. Neste caso, costuma-se usar A^2 para denotar $A \times A$; A^3 para $A \times A \times A$ etc. Obviamente, A^n denota o produto de A por A n vezes, e A^1 é o próprio A.

Exercício 4.4 Expressar em símbolos:

(a) A é um subconjunto de B

(b) A é um subconjunto próprio de B

(c) o conjunto união de D e S

(d) c é elemento da intersecção de A e B

(e) a é um elemento do complemento de B

(f) a não é um elemento do complemento da união de M e N

Exercício 4.5 Quais das seguintes afirmações são verdadeiras, e quais são falsas?

(a) $c \in \{a, c, e\}$

(b) $e \notin \{a, b, c\}$

(c) $\{0, 1, 2\} \subset \{0, 1, 2\}$

(d) $\{0, 1, 2\} \subseteq \{0, 1, 2\}$

(e) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$

(f) $a \in \{b, \{a\}\}$

(g) $\{a\} \in \{b, \{a\}\}$

(h) $\{a\} \in \{c, \{b\}, a\}$

(i) $c \in \{a, b\} \cup \{d, c, e\}$

(j) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$

(k) $\{0, 1, 2\} \subset \{3, 2, 5, 4, 6\}$

(l) $\{1, b\} \subseteq \{1, b, c\} \cap \{4, d, 1, f, b\}$

Exercício 4.6 Sejam A, B e C os seguintes conjuntos:

$A = \{x, y, z\}$ $\quad B = \{2, 4\}$ $\quad C = \{\pi\}$ $\quad D = \{a, b\}$ $\quad E = \{1, 4, 8\}$ $\quad F = \{4\}$

Calcule:

(a) $A \times B$

(b) $B \times C$

(c) $B \times A$

(d) $D \times F \times B$

(e) $C \times F \times A$

(f) $E - B$

(g) $D \times (B - E)$

(h) $(B \cap E) \times F$

(i) $(E \cup F) \times D$

(j) $(C \cup F) \times (A - \{x\})$

(k) $\mathcal{P}(A)$

(l) $\mathcal{P}(B)$