

Regras de Inferência

Muitos das situações que envolvem a validade de um argumento são constituídos por uma quantidade grande de sentenças, sendo assim, o método das **tabelas de verdade não é o mais apropriado para ser utilizado**. Vejamos como lidar com este problema, fazendo uso das regras de inferencia.

Regras de Inferência

(DN) Dupla negação	$\frac{\neg(\neg A)}{A} \quad \text{ou} \quad \frac{A}{\neg(\neg A)}$	(SD) Silogismo disjuntivo	$\frac{A \vee B, \neg A}{B}$
(C) Conjunção	$\frac{A, B}{A \wedge B}$	(MP) <i>Modus ponens</i>	$\frac{A \rightarrow B, A}{B}$
(S) Simplificação	$\frac{A \wedge B}{A}$	(MT) <i>Modus tolens</i>	$\frac{A \rightarrow B, \neg B}{\neg A}$
(D) Disjunção	$\frac{A}{A \vee B}$	(SH) Silogismo hipotético	$\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$
(BIC) Regras do bicondicional	$\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B} \quad \text{ou}$	(DC) Dilema construtivo	$\frac{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C}{B \vee D}$
	$\frac{A \leftrightarrow B}{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)}$	(DD) Dilema destrutivo	$\frac{A \rightarrow B, C \rightarrow D, \neg B \vee \neg D}{\neg A \vee \neg C}$

Além dessas regras, serão utilizadas as propriedades comutativa, associativa, distributiva, idempotente, De Morgan, a equivalência $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \equiv \neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, ou alguma outra já verificada.

A proposição a seguir evidencia a importância da regra MODUS PONENS

Proposição 1.12: Se \mathbf{A} e $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ são tautologias, então \mathbf{B} também é uma tautologia.

Exercícios:

30. Dar os nomes das regras usadas em cada um dos argumentos seguintes:

$$\mathbf{A \rightarrow (D \vee G), \neg(D \vee G) \vdash \neg A}$$

Modus Tollens

$$\frac{\mathbf{A \rightarrow B, \neg B}}{\neg A}$$

$$\mathbf{(C \rightarrow E) \vee (D \vee A), \neg(D \vee A) \vdash C \rightarrow E}$$

Silogismo
disjuntivo

$$\frac{\mathbf{A \vee B, \neg A}}{\mathbf{B}}$$

Técnicas dedutivas

Dedução direta: uma forma proposicional \mathbf{B} é deduzida diretamente de algumas formas proposicionais dadas, se é possível formar uma sequência de proposições $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ de maneira que:

(i) $\mathbf{A}_n \equiv \mathbf{B}$;

(ii) para qualquer valor de i , $1 \leq i < n$, \mathbf{A}_i é uma das premissas ou constitui a conclusão de algum argumento válido formado a partir de proposições que a precedam na sequência.

Neste caso, escrevemos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \equiv \mathbf{B}$ e dizemos que a forma proposicional \mathbf{B} é dedutível ou derivável a partir do conjunto $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_{n-1}\}$ de premissas ou hipóteses. Denotamos os conjuntos de formas proposicionais por letras gregas maiúsculas.

Exemplos:

(a) Deduzir $\neg D$ a partir de C , $C \rightarrow \neg B$, $\neg B \rightarrow \neg D$.

1. C

p.

2. $C \rightarrow \neg B$

p.

3. $\neg B \rightarrow \neg D$

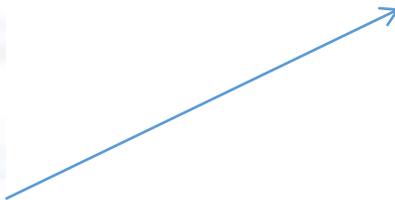
p.

4. $\neg B$

MP em 1 e 2

5. $\neg D$

MP em 3 e 4

$$\frac{A \rightarrow B, A}{B}$$


(c) Derivar " $x = 0$ " das premissas:

1. $x \neq 0 \rightarrow x = y$

p.

2. $x = y \rightarrow x = z$

p.

3. $x \neq z$

p.

4. $x \neq y$

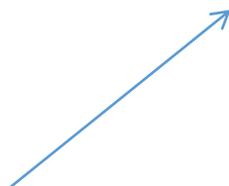
MT em 2 e 3

5. $\neg(x \neq 0) \equiv \sim(\sim(x=0))$

MT em 1 e 4

6. $x = 0$

DN em 5

$$\frac{A \rightarrow B, \neg B}{\neg A}$$


$$\frac{\neg(\neg A)}{A}$$


ou

$$\frac{A}{\neg(\neg A)}$$

Dedução de conclusão condicional: se desejamos obter $A \rightarrow B$, dadas as premissas A_1, A_2, \dots, A_n , tomamos, a princípio, a conjunção dessas premissas como D e comprovamos a validade do seguinte argumento $D \vdash A \rightarrow B$, ou seja, $D \Rightarrow A \rightarrow B$. Se isso ocorre, então $v(D \rightarrow (A \rightarrow B)) = 1$ see $v(\neg D \vee (\neg A \vee B)) = 1$ see $v((\neg D \vee \neg A) \vee B) = 1$ see $v(\neg(D \wedge A) \vee B) = 1$ see $v((D \wedge A) \rightarrow B) = 1$. Portanto, $D \wedge A \Rightarrow B$.

Exemplos:

(a) Derivar $E \rightarrow \neg A$, dadas as premissas:

1. $A \rightarrow B$	p.
2. $E \rightarrow \neg B$	p.
3. E	pp.
4. $\neg B$	MP em 2 e 3
5. $\neg A$	MT em 1 e 4
6. $E \rightarrow \neg A$	DC de 3 a 5

(c) Obter $C \rightarrow D$, dadas as premissas:

- | | |
|---|----------------|
| 1. $(C \vee E) \rightarrow A$ | p. |
| 2. $E \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ | p. |
| 3. $E \vee D$ | p. |
| 4. C | pp. |
| 5. $C \vee E$ | D em 4 |
| 6. A | MP em 1 e 5 |
| 7. $E \rightarrow \neg(A \vee B)$ | De Morgan em 2 |
| 8. $A \vee B$ | D em 6 |
| 9. $\neg(\neg(A \vee B))$ | DN em 8 |
| 10. $\neg E$ | MT em 7 e 9 |
| 11. D | SD em 3 e 10 |
| 12. $C \rightarrow D$ | DC de 4 a 11. |

Dedução de conclusão bicondicional: A dedução de um argumento cuja conclusão está na forma bicondicional $C \leftrightarrow D$ é semelhante à dedução condicional, com a distinção de que é feita em duas partes distintas, ou seja, num primeiro momento deduz-se $C \rightarrow D$ e, em seguida, $D \rightarrow C$. Assim concluimos pela validade do argumento.

Exemplo:

(a) Derivar $C \leftrightarrow D$ quando conhecidas as premissas:

1. $F \rightarrow C$	p.
2. $D \rightarrow F$	p.
3. $C \rightarrow G$	p.
4. $D \vee \neg G$	p.
<hr/>	
5a. C	pp.
6a. G	MP em 3 e 5a
7a. D	SD em 4 e 6a
8a. $C \rightarrow D$	DC de 5a a 7a
<hr/>	
5b. D	pp.
6b. F	MP em 2 e 5b
7b. C	MP em 1 e 6b
8b. $D \rightarrow C$	CD de 5b a 7b
<hr/>	
9. $(C \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow C)$	C em 8a e 8b
10. $C \leftrightarrow D$	BIC em 9.

Dedução indireta: Um método frequentemente usado na demonstração da validade de um argumento é denominado *dedução indireta* ou *redução a um absurdo*, que consiste em admitir a negação da conclusão como uma nova premissa e, então, deduzir uma contradição. A ideia intuitiva desse raciocínio é que admitimos que as teorias com as quais tratamos são livres de contradições, ou seja, nelas não pode ocorrer $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A} \equiv 0$ e, mais, uma das proposições, \mathbf{A} ou $\neg \mathbf{A}$, deve ser verdadeira.

Consideremos os argumentos:

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B} \quad (1) \quad \text{e:}$$

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n, \neg \mathbf{B} \vdash 0 \quad (2),$$

em que 0 é uma contradição qualquer como, por exemplo, $\mathbf{D} \wedge \neg \mathbf{D}$.

Segundo a dedução condicional, verificamos que, se (2) é um argumento válido, então o argumento seguinte também é válido:

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n \vdash \neg \mathbf{B} \rightarrow 0 \quad (3).$$

Mas, como:

$$\neg \mathbf{B} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \neg \neg \mathbf{B} \vee 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} \vee 0 \Leftrightarrow \mathbf{B},$$

segue que o argumento (1) é válido se, e somente se, o argumento (2) é válido.

Em resumo, para a verificação da validade de um argumento pela redução a um absurdo, introduzimos a negação da conclusão como uma nova premissa e obtemos uma contradição.

Exemplos:

(a) Deduzir **E**, dadas as premissas:

1. $\neg A \rightarrow E$	p.
2. $\neg E \rightarrow B$	p.
3. $\neg(A \wedge B)$	p.
4. $\neg E$	pp.
5. B	MP em 2 e 4
6. $\neg A \vee \neg B$	De Morgan em 3
7. $\neg \neg B$	DN em 5
8. $\neg A$	SD em 6 e 7
9. E	MP em 1 e 8
10. $E \wedge \neg E$	C em 4 e 9
11. E	DI de 4 a 10

Dedução indireta da forma condicional: Para a demonstração da validade de um argumento que tenha a conclusão do tipo $C \rightarrow D$, segundo a dedução indireta, tomamos $\neg(C \rightarrow D)$ como uma nova premissa provisória, onde obtemos $\neg(\neg C \vee D)$ e, daí, $(C \wedge \neg D)$. Portanto, na prática, acrescentamos o antecedente C e a negação do conseqüente $\neg D$ como novas premissas e deduzimos uma contradição.

Exemplos:

(a) Deduzir $E \rightarrow \neg B$ dadas as premissas abaixo:

1. $\neg E \vee \neg D$	P.	6. $\neg D$	SD em 1 e 5
2. $B \rightarrow D$	P.	7. $\neg B$	MT em 2 e 6
3. E	PP.	8. $\neg B \wedge \neg \neg B$	C em 4 e 7
4. $\neg \neg B$	PP.	9. $E \rightarrow \neg B$	DI de 3 a 8
5. $\neg \neg E$	DN em 3		

