Regras de Inferência

Muitos das situações que envolvem a validade de um argumento são constituídos por uma quantidade grande de sentenças, sendo assim, o método das **tabelas de verdade não é o mais apropriado para ser utilizado**. Vejamos como lidar com este problema, fazendo uso das regras de inferencia.

Regras de Inferência

(DN) Dupla negação $\dfrac{\neg(\neg A)}{A}$ ou $\dfrac{A}{\neg(\neg A)}$

(C) Conjunção $\dfrac{A, B}{A \wedge B}$

(S) Simplificação $\dfrac{A \wedge B}{A}$

(D) Disjunção $\dfrac{A}{A \vee B}$

(BIC) Regras do bicondicional $\dfrac{A \to B,\ B \to A}{A \leftrightarrow B}$ ou

$$\dfrac{A \leftrightarrow B}{(A \to B) \wedge (B \to A)}$$

(SD) Silogismo disjuntivo $\dfrac{A \vee B,\ \neg A}{B}$

(MP) *Modus ponens* $\dfrac{A \to B,\ A}{B}$

(MT) *Modus tolens* $\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\neg A}$

(SH) Silogismo hipotético $\dfrac{A \to B,\ B \to C}{A \to C}$

(DC) Dilema construtivo $\dfrac{A \to B,\ C \to D,\ A \vee C}{B \vee D}$

(DD) Dilema destrutivo $\dfrac{A \to B,\ C \to D,\ \neg B \vee \neg D}{\neg A \vee \neg C}$

Além dessas regras, serão utilizadas as propriedades comutativa, associativa, distributiva, idempotente, De Morgan, a equivalência $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \equiv \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, ou alguma outra já verificada.

A proposição a seguir evidência a importância da regra MODUS PONENS

Proposição 1.12: Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ são tautologias, então $\mathbf{B}$ também é uma tautologia.

Exercícios:

30. Dar os nomes das regras usadas em cada um dos argumentos seguintes:

$A \to (D \vee G), \neg(D \vee G) \vdash \neg A$

Modus Tollens

$$\frac{A \to B,\ \neg B}{\neg A}$$

$(C \to E) \vee (D \vee A), \neg(D \vee A) \vdash C \to E$

Silogismo disjuntivo

$$\frac{A \vee B,\ \neg A}{B}$$

Técnicas dedutivas

Dedução direta: uma forma proposicional **B** é deduzida diretamente de algumas formas proposicionais dadas, se é possível formar uma sequência de proposições $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ de maneira que:

(i) $\mathbf{A}_n \equiv \mathbf{B}$;

(ii) para qualquer valor de i, $1 \leq i < n$, $\mathbf{A}_i$ é uma das premissas ou constitui a conclusão de algum argumento válido formado a partir de proposições que a precedam na sequência.

Neste caso, escrevemos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \equiv \mathbf{B}$ e dizemos que a forma proposicional **B** é *dedutível* ou *derivável* a partir do conjunto $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}\}$ de premissas ou hipóteses. Denotamos os conjuntos de formas proposicionais por letras gregas maiúsculas.

Exemplos:

(a) Deduzir $\neg D$ a partir de C, $C \to \neg B$, $\neg B \to \neg D$.

1. C	p.
2. $C \to \neg B$	p.
3. $\neg B \to \neg D$	p.
4. $\neg B$	MP em 1 e 2
5. $\neg D$	MP em 3 e 4

$$\frac{A \to B,\ A}{B}$$

(c) Derivar "$x = 0$" das premissas:

1. $x \neq 0 \to x = y$	p.
2. $x = y \to x = z$	p.
3. $x \neq z$	p.
4. $x \neq y$	MT em 2 e 3
5. $\neg(x \neq 0)$ $\equiv \sim(\sim(x=0))$	MT em 1 e 4
6. $x = 0$	DN em 5

$$\frac{A \to B,\ \neg B}{\neg A}$$

$$\frac{\neg(\neg A)}{A} \quad \text{ou} \quad \frac{A}{\neg(\neg A)}$$

Dedução de conclusão condicional: se desejamos obter $A \to B$, dadas as premissas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tomamos, a princípio, a conjunção dessas premissas como D e comprovamos a validade do seguinte argumento $D \vdash A \to B$, ou seja, $D \Rightarrow A \to B$. Se isso ocorre, então $v(D \to (A \to B)) = 1$ see $v(\neg D \vee (\neg A \vee B)) = 1$ see $v((\neg D \vee \neg A) \vee B) = 1$ see $v(\neg(D \wedge A) \vee B) = 1$ see $v((D \wedge A) \to B) = 1$. Portanto, $D \wedge A \Rightarrow B$.

Exemplos:

(a) Derivar $E \to \neg A$, dadas as premissas:

1.	$A \to B$	p.
2.	$E \to \neg B$	p.
3.	E	pp.
4.	$\neg B$	MP em 2 e 3
5.	$\neg A$	MT em 1 e 4
6.	$E \to \neg A$	DC de 3 a 5

(c) Obter $\mathbf{C \rightarrow D}$, dadas as premissas:

1. $(\mathbf{C} \vee \mathbf{E}) \rightarrow \mathbf{A}$	p.
2. $\mathbf{E} \rightarrow (\neg \mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B})$	p.
3. $\mathbf{E} \vee \mathbf{D}$	p.
4. $\mathbf{C}$	pp.
5. $\mathbf{C} \vee \mathbf{E}$	D em 4
6. $\mathbf{A}$	MP em 1 e 5
7. $\mathbf{E} \rightarrow \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$	De Morgan em 2
8. $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$	D em 6
9. $\neg(\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}))$	DN em 8
10. $\neg \mathbf{E}$	MT em 7 e 9
11. $\mathbf{D}$	SD em 3 e 10
12. $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$	DC de 4 a 11.

Dedução de conclusão bicondicional: A dedução de um argumento cuja conclusão está na forma bicondicional **C↔D** é semelhante à dedução condicional, com a distinção de que é feita em duas partes distintas, ou seja, num primeiro momento deduz-se **C→D** e, em seguida, **D→C**. Assim concluímos pela validade do argumento.

Exemplo:

(a) Derivar **C↔D** quando conhecidas as premissas:

1. **F→C**	p.
2. **D→F**	p.
3. **C→G**	p.
4. **D∨¬G**	p.
5a. **C**	pp.
6a. **G**	MP em 3 e 5a
7a. **D**	SD em 4 e 6a
8a. **C→D**	DC de 5a a 7a
5b. **D**	pp.
6b. **F**	MP em 2 e 5b
7b. **C**	MP em 1 e 6b
8b. **D→C**	CD de 5b a 7b
9. (**C→D**)∧(**D→C**)	C em 8a e 8b
10. **C↔D**	BIC em 9.

Dedução indireta: Um método frequentemente usado na demonstração da validade de um argumento é denominado *dedução indireta* ou *redução a um absurdo*, que consiste em admitir a negação da conclusão como uma nova premissa e, então, deduzir uma contradição. A ideia intuitiva desse raciocínio é que admitimos que as teorias com as quais tratamos são livres de contradições, ou seja, nelas não pode ocorrer $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A} \equiv 0$ e, mais, uma das proposições, **A** ou $\neg$**A**, deve ser verdadeira.

Consideremos os argumentos:

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B} \qquad (1) \quad \text{e:}$$

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \neg \mathbf{B} \vdash 0 \qquad (2),$$

em que 0 é uma contradição qualquer como, por exemplo, $\mathbf{D} \wedge \neg \mathbf{D}$.

Segundo a dedução condicional, verificamos que, se (2) é um argumento válido, então o argumento seguinte também é válido:

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \neg\mathbf{B} \rightarrow 0 \qquad (3).$$

Mas, como:

$$\neg\mathbf{B} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \neg\neg\mathbf{B} \vee 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} \vee 0 \Leftrightarrow \mathbf{B},$$

segue que o argumento (1) é válido se, e somente se, o argumento (2) é válido.

Em resumo, para a verificação da validade de um argumento pela redução a um absurdo, introduzimos a negação da conclusão como uma nova premissa e obtemos uma contradição.

Exemplos:

(a) Deduzir **E**, dadas as premissas:

1. $\neg\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{E}$	p.
2. $\neg\mathbf{E}\rightarrow\mathbf{B}$	p.
3. $\neg(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})$	p.
4. $\neg\mathbf{E}$	pp.
5. $\mathbf{B}$	MP em 2 e 4
6. $\neg\mathbf{A}\vee\neg\mathbf{B}$	De Morgan em 3
7. $\neg\neg\mathbf{B}$	DN em 5
8. $\neg\mathbf{A}$	SD em 6 e 7
9. $\mathbf{E}$	MP em 1 e 8
10. $\mathbf{E}\wedge\neg\mathbf{E}$	C em 4 e 9
11. $\mathbf{E}$	DI de 4 a 10

Dedução indireta da forma condicional: Para a demonstração da validade de um argumento que tenha a conclusão do tipo $\mathbf{C \to D}$, segundo a dedução indireta, tomamos $\neg(\mathbf{C \to D})$ como uma nova premissa provisória, onde obtemos $\neg(\neg\mathbf{C} \vee \mathbf{D})$ e, daí, $(\mathbf{C} \wedge \neg\mathbf{D})$. Portanto, na prática, acrescentamos o antecedente $\mathbf{C}$ e a negação do consequente $\neg\mathbf{D}$ como novas premissas e deduzimos uma contradição.

Exemplos:

(a) Deduzir $\mathbf{E \to \neg B}$ dadas as premissas abaixo:

1. $\neg\mathbf{E} \vee \neg\mathbf{D}$	p.	6. $\neg\mathbf{D}$	SD em 1 e 5
2. $\mathbf{B \to D}$	p.	7. $\neg\mathbf{B}$	MT em 2 e 6
3. $\mathbf{E}$	pp.	8. $\neg\mathbf{B} \wedge \neg\neg\mathbf{B}$	C em 4 e 7
4. $\neg\neg\mathbf{B}$	pp.	9. $\mathbf{E \to \neg B}$	DI de 3 a 8
5. $\neg\neg\mathbf{E}$	DN em 3		