Assim, uma relação binária pode ser representada por meio de *um conjunto de pares ordenados*, a saber, o conjunto daqueles pares onde o primeiro é o pai do segundo. Para dar um exemplo, a relação 'x é pai de y' poderia ser representada pelo seguinte conjunto, onde o primeiro elemento de cada par é pai do segundo:

$$\{\langle \text{João}, \text{Maria}\rangle, \langle \text{João}, \text{Antônio}\rangle, \langle \text{Antônio}, \text{Teresa}\rangle, \ldots\}.$$

Se dois indivíduos a e b estão numa relação R, escrevemos que Rab. No caso particular de relações binárias, é também costumeiro colocar o símbolo da relação *entre* os símbolos dos indivíduos: aRb.

<u>Definição:</u> **Uma relação entre dois conjuntos A e B, denotada por R(A, B), é um subconjunto de AxB.**

Dizemos que R é uma *relação sobre A* desde que $R \subseteq A x A$.

Dizemos que R é uma *relação de A para B* se $R \subseteq A x B$.

Exemplo 1: Sejam A={1,2,3,4} e B={4,5,6,7}.

R={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)} é uma relação sobre A ;

S={(1,2),(3,4)} é uma relação sobre A;

T={(1,4),(1,5),(4,7)} é uma relação de A para B;

U={(4,4),(5,2),(6,2),(7,3)} é uma relação de B para A;

V={(1,7),(7,1)} é uma relação, mas não de A para B nem de B para A, nem sobre A e nem sobre B.

Há duas maneiras de apresentarmos uma relação:

* A primeira é apresentando o subconjunto de AxB, através de seus pares ordenados (vide exemplo 1).

* A segunda é definindo uma regra, na qual escolhemos os pares ordenados que satisfazem esta regra.

Relações a partir de uma regra:

* Sejam $A=\Re$ e $B=\Re$ e a regra $P(x,y)$: x é menor que y.

O conjunto **$R=\{(a,b):a,b\in\Re$ e $a<b\}$ é uma relação sobre $\Re$.**

* Sejam $A=\mathrm{N}$ e $B=\mathrm{N}$ e a regra $P(x,y)$: x é divisível por y.

O conjunto **$R=\{(a,b)$: b divide a$\}$ é uma relação sobre N.**

Chama-se Domínio de R o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

Chama-se Imagem de R o conjunto IM de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

Se um par **(a,b) está numa relação R**, dizemos que a está relacionado com b pela relação R e denotaremos este fato por **aRb ou (a,b)**$\in$R .

Relação Inversa

Se R é uma relação de A para B, dizemos que R^{-1}={(b,a): aRb} é a relação inversa de R.

Exemplo 2: Sejam $A=\{a, b, c\}$, $B=\{1, 2, 3\}$.

a) Se $R=\{(a,1),(a,2),(a,3),(c,3)\}$, então

$$R^{-1}=\{(1,a), (2,a),(3, a), (3,c)\}.$$

b) Se $R=\{(1,5), (2,3), (4,4), (7,3)\}$ então

$$R^{-1}=\{(5,1), (3,2),(4, 4), (3,7)\}.$$

Propriedades de Relações

a) Se para todo $x \in A$, $(x,x) \in R$; dizemos que R é **reflexiva**.

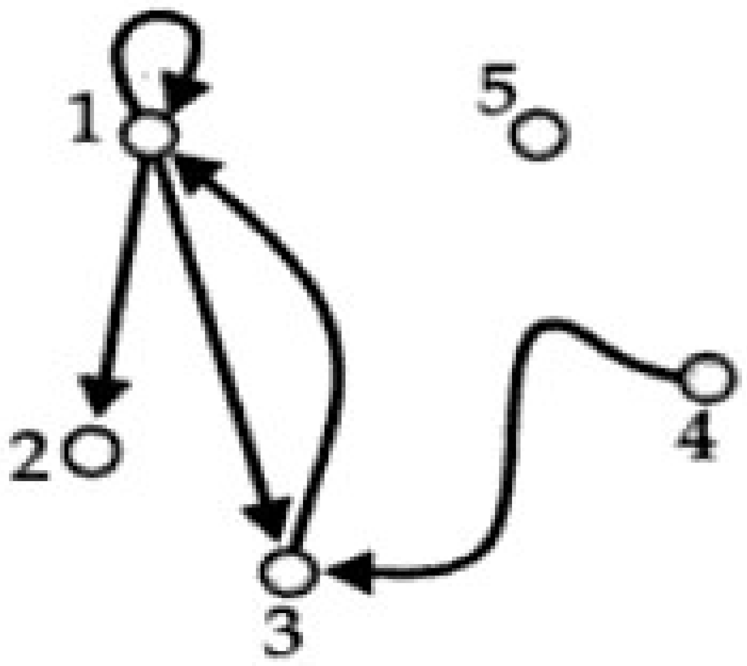
b) Dados x, $y \in A$, se $(x,y) \in R$ então $(y,x) \in R$; dizemos que R é **simétrica**.

b) Dados x, $y \in A$, se $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$ então $x=y$; dizemos que R é **antisimétrica**.

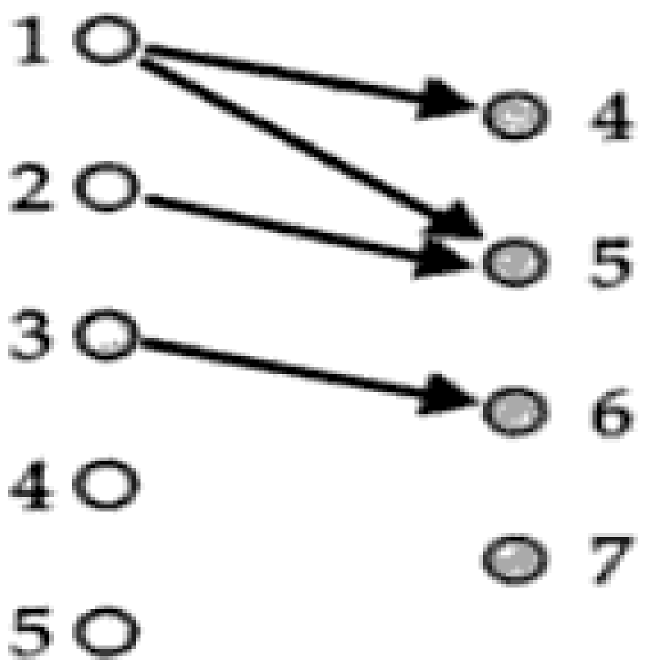
c) Dados x, y, $z \in A$, se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$ então $(x,z) \in R$; dizemos que R é **transitiva**.

Representação geométrica de uma relação sobre A

Sejam $A=\{1,2,3,4,5\}$ e $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(4,3)\}$.



Para traçar uma imagem de uma relação de A para B, traçamos dois conjuntos de pontos. O primeiro conjunto de pontos corresponde aos elementos em A; colocamos esses pontos à esquerda da figura. Os pontos correspondentes a B aparecem à direita. Traçamos, então, uma seta de $a \in A$ para $b \in B$ sempre que (a, b) estiver na relação. Por exemplo, sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $R = \{4, 5, 6, 7\}$, e S a relação $\{(1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$. A segunda figura ilustra a relação S.



Trace ilustrações das seguintes relações:

a) Seja $A = \{a \in \mathbb{N} : a \mid 10\}$ e seja R a relação $\mid$ (divide) restrita a A.

b) Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja R a relação *menor do que* restrita a A.

c) Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja R a relação = (igual) restrita a A.

d) Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Consideremos a relação $\geq$ (maior do que ou igual a) de A para B.

e) Sejam $A = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e seja $R = \{(a, b): a \in A, b \in B, a \mid b\}$.

20 Funções

Intuitivamente, uma função é uma "regra" ou um "mecanismo" que transforma uma quantidade em outra. Por exemplo, a função $f(x) = x^2 + 4$ toma um inteiro x e o transforma no inteiro $x^2 + 4$. A função $g(x) = |x|$ toma o inteiro x e retorna x, se $x \geq 0$, e $-x$, se $x < 0$.

Nesta seção, vamos desenvolver uma visão mais abstrata e rigorosa das funções. As funções são tipos especiais de relações (reveja a Seção 11).

Recorde que uma *relação* nada mais é do que um conjunto de pares ordenados. Assim como esta definição de relação foi, em princípio, contra-intuitiva, assim também a definição precisa de uma função pode parecer estranha, inicialmente.

Definição 20.1 (Função)

Uma relação f é chamada *função* desde que $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$ impliquem $b = c$.

Enunciada de forma negativa, uma relação f não é uma função se existem a, b, c com $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$, e $b \neq c$.

Sejam

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 7)\} \text{ e}$$
$$g = \{(1, 2), (1, 3), (4, 7)\}.$$

A relação f é uma função, mas a relação g não o é porque $(1, 2), (1, 3) \in g$ e $2 \neq 3$.

Definição 20.5 (Domínio, Imagem)

Seja f uma função. O conjunto de todos os primeiros elementos possíveis dos pares ordenados de f é chamado *domínio de f* e se denota por dom f. O conjunto de todos os segundos elementos possíveis dos pares ordenados de f se chama *imagem* de f e se denota por im f.

Em outra notação,

$$\operatorname{dom} f = \{a : \exists b, (a, b) \in f\} \quad \text{e} \quad \operatorname{im} f = \{b : \exists a, (a, b) \in f\}.$$

Exemplo 20.6

Seja $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 7)\}$. (Esta é a função do Exemplo 20.2.) Então,

$$\operatorname{dom} f = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{e} \quad \operatorname{im} f = \{1, 2, 3, 7\}.$$

Exemplo 20.7

Seja f a função do Exemplo 20.4, isto é,

$$f = \{(x, y) \colon x, y \in \mathbb{Z}, y = x^2\}.$$

O domínio de f é o conjunto de todos os inteiros e a imagem de f é o conjunto de todos os quadrados perfeitos.

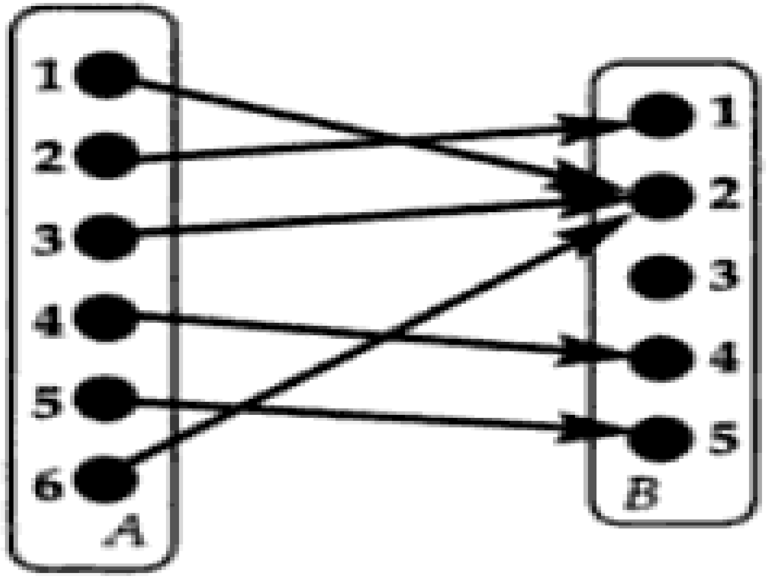
Definição 20.8 ($f: A \to B$)

Seja f uma função e sejam os conjuntos A e B. Dizemos que "f é uma função de A para B" se $\text{dom } f = A$ e $\text{im } f \subseteq B$. Em tal caso, escrevemos $f: A \to B$. Dizemos também que "f é uma *aplicação* de A em B".

Temos uma forma alternativa para traçar gráficos de funções $f: A \to B$, onde A e B são conjuntos finitos. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e consideremos a função $f: A \to B$ definida por

$$f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 2)\}.$$

Obtém-se uma ilustração de f traçando-se dois conjuntos de pontos: um para A, à esquerda, e um para B, à direita. Traça-se uma seta de um ponto $a \in A$ a um ponto $b \in B$ precisamente quando $(a, b) \in f$, isto é, quando $f(a) = b$. Pela figura, é fácil vermos que $\operatorname{im} f = \{1, 2, 4, 5\}$.



Consideremos agora g definida por

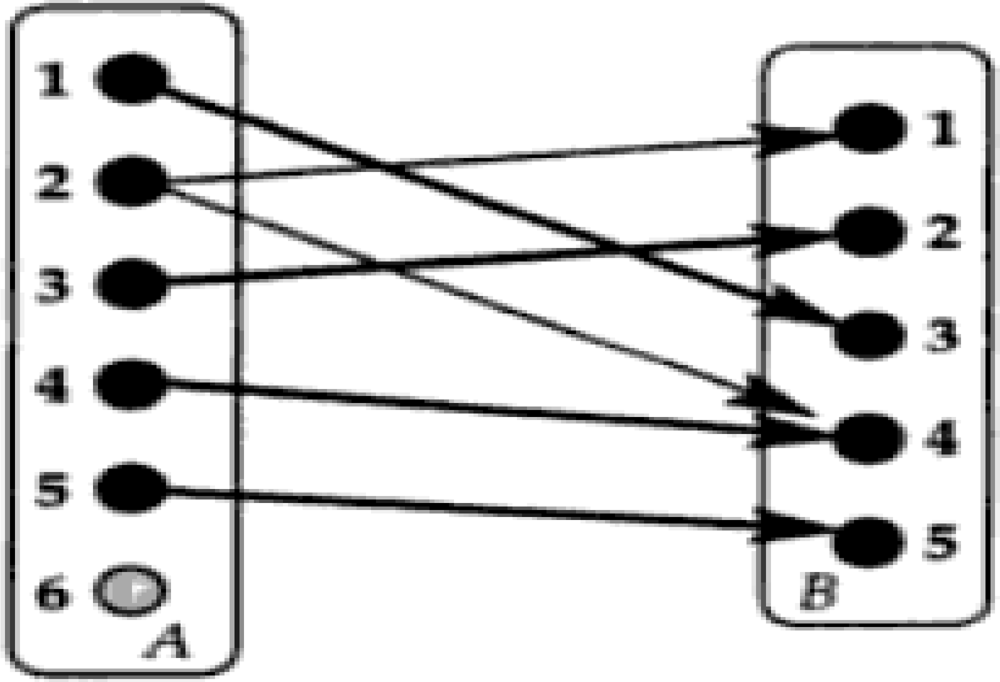
$$g = \{(1, 3), (2, 1), (2, 4)\ (3, 2), (4, 4), (5, 5)\}.$$

Temos que g é uma função de $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$? Há duas razões por que $g : A \to B$ é falsa.

Primeiro, $6 \in A$ mas $6 \notin \text{dom } g$. Assim, $\text{dom } g \neq A$, como se pode ver na figura: não há setas partindo do elemento 6.

Segundo, g não é uma função (de um conjunto arbitrário para outro). Note que $(2, 1), (2, 4) \in g$, o que viola a Definição 20.1. A figura também ilustra este fato: há duas setas partindo do elemento 2.

Se f é uma função de A para B ($f: A \to B$), sua figura deve satisfazer o seguinte: todo ponto à esquerda (em A) tem exatamente uma seta partindo dele e terminando à direita (em B).


1
2
3
4
5
6
A
1
2
3
4
5
B

Igualdade entre funções

Funções de A em B são relações, isto é, são subconjuntos de AxB, portanto, duas funções f e g de A em B são iguais se as respectivas relações são iguais. Assim, domf=domg e imf=img e f=g (f, g$\subseteq$AxB) .