ATIVIDADE 01

1. TÍTULO: ANÁLISE DE UMA EXPERIÊNCIA ATRAVÉS DE GRÁFICOS

2. OBJETIVO

- Elaborar um modelo para o escoamento de um líquido contido num recipiente.
- Construir e analisar gráficos numa planilha eletrônica.
- Aplicar os conceitos de algarismos significativos, erros em uma medida e linearização.

3. DESCRIÇÃO DA EXPERIÊNCIA

Nessa atividade vamos trabalhar com um conjunto de dados obtidos através de uma experiência cuja intenção era **investigar** o escoamento da água contida em um recipiente. Partiu-se da **hipótese** de que o tempo de escoamento dependeria da altura da coluna de água e do diâmetro do orifício do fundo do recipiente. Poderíamos ter escolhido outros parâmetros para análise.

Para estudar a dependência deste tempo em relação ao tamanho do orifício, foram considerados quatro recipientes iguais, com orifícios circulares de diferentes diâmetros, relativamente pequenos, em suas bases. Considerando que todos tinham a mesma altura h de água, mediu-se o tempo de escoamento.

Em seguida, para estudar a dependência do escoamento em relação à altura da coluna de água contida no recipiente, variou-se a altura da coluna de água que foi escoada por orifícios idênticos em diâmetro. Os dados obtidos encontram-se na tabela 1.

Faça uma figura que lhe permita visualizar a montagem experimental.

A análise desses resultados nos permite sugerir conclusões sobre a natureza do processo que está sendo investigado e predizer o resultado de experiências similares.

Tabela 1. Tempo de esvaziamento (em segundos) em função simultânea da altura (h) da coluna de água e do diâmetro (d) do orifício.

h em cm →	30,0	10,0	4,0	1,0
d em cm ↓	Tempo de esvaziamento(em segundos)			
1,5	74,0	44,5	26,7	14,1
2,0	41,2	23,7	15,0	7,3
3,0	18,4	10,5	6,8	3,7
5,0	6,8	3,9	2,2	1,5

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 Análise da Tabela.

ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

Registramos na Tabela 1 os valores dos tempos necessários para esvaziar cada recipiente. Devido à dificuldade de se medir precisamente intervalos de tempo usando um relógio, há um número menor de algarismos significativos nas medidas de pequenos intervalos de tempos do que nas de longos intervalos de tempos. Responda:

P1. O que são algarismos significativos?

P2. Examine os dados referentes ao diâmetro d. Quantos são os algarismos significativos de cada medida?

P3. Ainda com referencia ao diâmetro d, sugira o tipo de instrumento utilizado na medição (uma característica importante associada aos algarismos significativos é que eles nos permitem identificar o tipo de instrumento utilizado na medição). No caso do diâmetro d, qual a menor divisão da escala utilizada (metros, centímetros, milímetros etc.)?

P4. No caso do tempo de escoamento, qual a menor divisão da escala utilizada? Em função disso, que tipo de instrumento foi utilizado na medição dos tempos de esvaziamento?

ERROS

Cada resultado apresentado na Tabela 1 tem um erro inerente ao processo de medida que, nesse caso. é chamado **erro de escala**. Note que as medidas foram feitas uma única vez para cada situação. Não há valor médio, nem desvio padrão nesse caso. Já ao erro do aparelho em relação ao objeto medido denominamos **erro relativo** o qual pode ser expresso em porcentagem (ver aula introdutória). Verifique que cada medida de diâmetro d tem um mesmo erro absoluto (dado pelo instrumento), mas um erro relativo diferente para cada medida (que depende do valor da medida).

P5. Qual é o erro estimado nas leituras do diâmetro d, da altura h e do tempo t de escoamento?

P6. Qual das alturas tem o maior erro relativo e qual tem o menor? Qual dos tempos tem o maior erro relativo e qual tem o menor? Qual dos diâmetros tem o maior erro relativo e qual tem o menor?

GRÁFICOS

A importância da utilização de gráficos na análise de experiências em laboratório decorre da possibilidade de analisar o comportamento de uma grandeza (variável dependente) em relação à outra (variável independente).

É possível construir rapidamente gráficos e realizar uma série de análises utilizando computadores. Entretanto, a rapidez dos computadores pode gerar uma série de equívocos, pois deixa pouca margem para que as pessoas compreendam o que estão fazendo. Aos poucos, introduziremos o uso de programas de computador na análise dos dados, pois entendemos que um bom profissional não pode prescindir desta ferramenta. Adiantamos que a melhor ferramenta computacional para a análise de dados é a planilha eletrônica.

Na presente atividade, estudaremos como o tempo de escoamento da água varia em função da altura e do diâmetro do orifício. Procuraremos estudar essas questões separadamente. Todos os dados necessários constam da Tabela 1, apresentada anteriormente. Uma representação gráfica desses dados possibilita o estabelecimento de uma relação matemática entre os mesmos. Os gráficos serão feitos no computador utilizando-se as ferramentas de uma planilha eletrônica.

A) COMO O TEMPO DE ESCOAMENTO DEPENDE DO DIÂMETRO DO ORIFÍCIO?

A Tabela 1 nos permite estudar como o tempo de escoamento depende da altura da coluna de água no recipiente e do diâmetro do orifício por onde escoa a água.

Para analisar a relação entre o diâmetro do orifício e o tempo de escoamento da água, podemos utilizar gráficos, os quais são mais fáceis de interpretar do que tabelas. Assim, vamos **fazer o gráfico do tempo (t) de escoamento versus diâmetro (d)** do orifício para cada uma das alturas h**.**

Registre na planilha eletrônica a Tabela 1, tal qual ela aparece na apostila (não se esqueça das legendas). Seguindo as instruções contidas no item “Fazendo um gráfico” do apêndice da apostila, obtenha inicialmente um gráfico com os pontos para a altura h = 30cm. Siga os procedimentos indicados para sobrepor as curvas relativas às outras alturas. É importante que todas elas sejam visualizadas num mesmo gráfico.

Para cada conjunto de pontos, vamos agora desenhar uma curva "média", seguindo os procedimentos descritos no item "Inserindo uma linha de tendência" do apêndice. Registre o título do gráfico e os nomes dos eixos, seguindo os procedimentos do apêndice.

O gráfico resultante deve ser semelhante ao ilustrado na Figura 2.

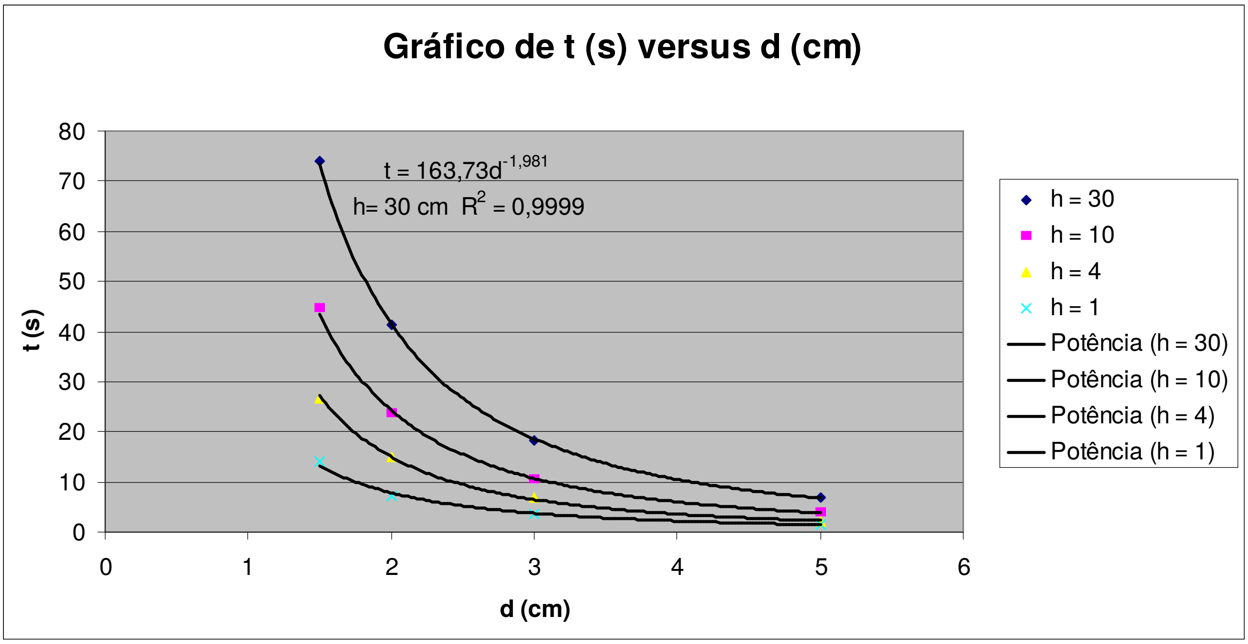

Figura 2. Gráfico t versus d. As curvas sugerem uma relação inversa entre *t* e *d*, isto é, sugerem que ***t*** diminuiu com *d,* mas não fornecem uma relação matemática entre elas.

Como mencionamos, nosso interesse no estudo desse fenômeno se relaciona também à possibilidade de **fazer previsões** sobre o mesmo. Pense sobre como seria o escoamento, por exemplo, para um recipiente com orifício de 1,5 cm de diâmetro e altura 25 cm. A experiência *não* foi realizada para essa altura, mas se temos uma relação matemática entre as grandezas envolvidas no problema, podemos tentar *prever* qual seria o tempo de escoamento.

Você pode usar as curvas da Figura 2 para **interpolar** entre suas medidas, e prever tempos de escoamento para diâmetros e alturas intermediárias entre os utilizados. Pode também, grosseiramente, **extrapolar** além delas, para prever tempos de escoamento para recipientes com alturas e diâmetros de orifícios maiores. É melhor, no entanto, fazer isso de maneira mais precisa.

Você pode obter uma expressão algébrica para relacionar t e d. O gráfico acima mostra que t diminuiu rapidamente com d; tal fato sugere uma relação inversa entre t e d e nada mais. Tal relação inversa pode ser do tipo 1/d, $1/\sqrt{d}$; $1/d^2$, $1/d^3$, etc.

Descobrir qual das relações gera uma relação linear é um processo de tentativas chamado "**linearização"** , cuja solução não é necessariamente única. **A relação inversa procurada é aquela que se torna linear com t.** Isso quer dizer que se t fosse proporcional a 1/d, o gráfico t versus 1/d daria uma reta. Já se t fosse proporcional a $1/d^3$, o gráfico t versus $1/d^3$ seria uma reta.

O Excel pode determinar qual relação matemática melhor descreve a curva obtida. Para isso, ele utiliza um processo de linearização, mas este fica "mascarado" e não pode ser notado por quem manipula a planilha eletrônica.

Utilize os recursos do Excel para obter as relações matemáticas para as curvas seguindo os procedimentos do item "Obtendo a relação matemática que melhor descreve o gráfico", contido no apêndice da apostila.

No final do processo descrito acima, após inserir a linha de tendência que melhor representa cada conjunto de dados, você deve ter obtido quatro equações do tipo

$$t = C_1 d^{\alpha}$$

Lembre-se que, no nosso caso:

y é t   e   x é d

Entretanto, observando os valores numéricos que aparecem nestas equações, notamos que elas estão escritas com um número excessivo de algarismos e que nem todos são significativos. Os coeficientes C_1 obtidos na sua planilha são resultados de cálculos e o Excel apresenta os números sem considerar quais são os A.S. Por exemplo, o Excel fornece o valor de C_1 (p/ h=30 cm) com cinco significativos, o que está errado. Cabe a nós determinarmos com quantos algarismos devemos escrever os mesmos.

De acordo com a Tabela 1, nenhuma medida de tempo (t) tem mais do que três A.S. Portanto é razoável supor que as constantes C_1 que aparecem em cada equação não podem ter mais do que três A.S.

Se os diâmetros têm dois A.S., o expoente de d não deve ter mais do que dois significativos.

Levando em conta estas considerações escreva na sua planilha na forma de tabela, próximo do gráfico, as referidas equações com os arredondamentos necessários. Preencha também as colunas da tabela abaixo.

h (cm)	30.0	10.0	4.0	1.0
α				
C_1				

P7. Quais são as unidades das grandezas C_1 e α?

Linearização

Como vimos no item anterior as relações matemáticas que relacionam os tempos de escoamento aos diâmetros dos orifícios são do tipo:

$$t = C_1 d^{\alpha} \qquad \textbf{Equação 1}$$

onde α é praticamente "- 2" para todos os casos.

Isso quer dizer que se fizermos o gráfico t em função de $1/d^2$ para cada um desses conjuntos de dados, **obteremos uma reta**. O Excel fez essa tentativa para ajustar o gráfico e nos fornecer a "linha de tendência". Esse procedimento recebe o nome de "linearização" ou "regressão linear". Os parâmetros da curva são determinados por um programa estatístico de aproximações sucessivas. Nesse caso, o programa tentou obter uma relação linear entre as grandezas, e **encontrou que t variava linearmente com $1/d^2$**.

Vamos agora realizar essa mesma tentativa, que foi "mascarada" pelo uso do recurso da planilha eletrônica. Para isso acrescente em sua planilha uma coluna para os valores de $1/d^2$ (veja no apêndice da apostila algumas dicas importantes para inserir fórmulas na planilha e sobre como gerar outra coluna a partir de uma coluna conhecida).

Para cada conjunto de pontos (relativos a cada altura h), construa uma curva t versus $1/d^2$ seguindo as instruções do apêndice. Todas devem ser visualizadas num único gráfico. Não se esqueça de detalhes como títulos, legendas etc.

Em função do que você obteve responda:

P8. A sugestão dada anteriormente pelo programa Excel acerca da melhor função que levaria a uma linearização é correta?

Seguindo as instruções do apêndice, insira a linha de tendência para cada caso. **Escolha a opção linear.**

Para cada caso você deverá encontrar algo parecido com o mostrado na figura 4. Anote os resultados das equações obtidas no gráfico e escreva-as na Tabela 2. **Considere o problema dos algarismos significativos.**

t =	Para h = 30 cm
t =	Para h = 10 cm
t =	Para h = 4 cm
t =	Para h = 1 cm

Tabela 2. Relação algébrica entre t e d para diferentes alturas h.

Note que, nesses resultados, os coeficientes C (ver **Equação 1**) *variam de acordo com a altura*. Isto é, para a altura h = 1 cm temos um determinado valor de C. Para h = 4 cm o valor de C é diferente do caso anterior.

Isso quer dizer que as equações podem ser escritas na forma:

$$t = \frac{C_1(h)}{d^2} \qquad \textbf{(Equação 2)}$$

Onde $C_1(h)$ é uma constante que vai depender de h.

P9. Compare as relações algébricas obtidas na Tabela 2. O que você pode dizer acerca delas?

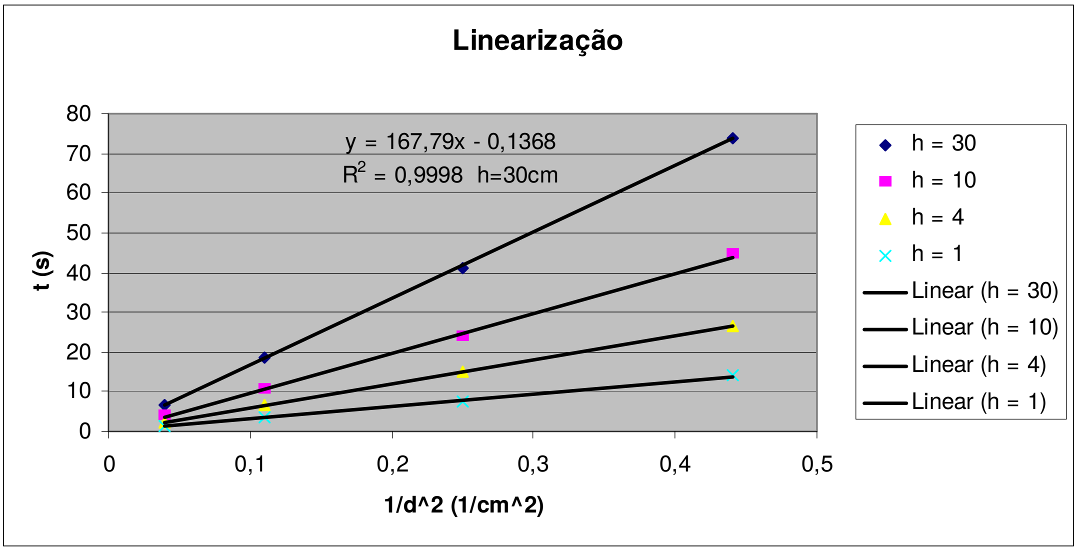

Figura 4. Gráfico de t versus $1/d^2$. O resultado sugere fortemente que o tempo de esvaziamento é diretamente proporcional a $1/d^2$. Neste exemplo é mostrado apenas o resultado para h= 30 cm. Complete o gráfico para todas as outras alturas.

A "linha de tendência do Excel" e o coeficiente de correlação (R^2)

A "linha de tendência" é uma idealização, enquanto os pontos ou dados representam a realidade. Traçá-la significa inferir um modelo matemático que melhor se aproxima dos seus dados experimentais. Assim, *não tem sentido* unir os pontos experimentais através de várias retas, pois isto significaria não um modelo, mas vários modelos matemáticos.

Como vimos, a linearização permite encontrar a relação matemática que gera uma relação linear entre as grandezas envolvidas. Encontramos, assim, a relação que descreve melhor determinada curva.

Você deve ter notado que quando nos itens anteriores pedimos que fosse adicionada a linha de tendência, sugerimos no primeiro caso uma função do tipo potência e, no segundo, uma função do tipo linear. Fizemos isso por razões didáticas. Agora você irá entender o porquê daquelas opções.

Em princípio, a razão para essa escolha está no valor de R^2 (R quadrado), que pode ser definido como uma medida do grau de ajuste (índice de correlação) entre a equação determinada pelo programa e os seus pontos experimentais. Quanto mais próximo R^2 estiver de 1, melhor o ajuste. Podem ocorrer casos em que duas ou mais funções apresentam valores de R^2 próximos. Nestes casos, deve-se confrontar cada uma das funções obtidas com o fenômeno físico em questão e descartar aquelas que levam a possíveis incompatibilidades teóricas.

Vamos agora entender através de várias tentativas **por que escolhemos o ajuste potência para o primeiro gráfico**.

Faça novamente um gráfico (tipo dispersão) do tempo *versus* diâmetro somente para a altura h = 30 cm, seguindo os procedimentos do apêndice. Vamos chamá-lo de gráfico A.

Em seguida, faça quatro cópias do gráfico em sua planilha.

Seguindo os procedimentos do apêndice, vá ao gráfico A e insira a linha de tendência linear. Peça para exibir a equação e o valor de R-quadrado no gráfico.

Vá ao gráfico B e insira a linha de tendência polinomial. Peça para exibir a equação e o valor de R-quadrado no gráfico.

Vá ao gráfico C e insira a linha de tendência exponencial. Peça para exibir a equação e o valor de R-quadrado no gráfico. Vá ao gráfico D e insira a linha de tendência logarítmo. Peça para exibir a equação e o valor de R-quadrado no gráfico.

P10. Compare os valores de R^2 para cada *tipo de função*. Que conclusões você tira dos procedimentos acima?

Vamos examinar agora o efeito de uma medida mal feita sobre R^2.

Vá à Tabela 1 e altere o valor de t para a altura de 30,0cm e diâmetro de 3,0cm. Inicialmente altere o valor de 18,4s para 10,0s e verifique os efeitos no gráfico, na equação e no valor de R^2. Em seguida, mude de 10,0s para 8,0s.

P11. Qual foi o efeito destas alterações no valor de R^2? O que esse exemplo mostra se pensarmos que esses tempos diferentes foram medidos com um instrumento de menor precisão?

Os exemplos acima ilustram o procedimento seguido para a escolha da função tipo "Potência" nesta Atividade. Entretanto, alertamos que, embora sendo um procedimento poderoso, a solução fornecida não é necessariamente única e às vezes é também necessário levar em conta certas considerações físicas não presentes nas medidas efetuadas.

Você ainda deve ter notado que não discutimos como são calculados os coeficientes das equações, bem como não lhe foi mostrado como se calcula o coeficiente R^2. Os alunos interessados em se aprofundar neste assunto devem consultar a bibliografia suplementar em particular o livro *Modelos de Regressão Linear* do professor Paulo Roberto Medeiros de Azevedo (Coleção Saber e Ciência, Vol. 1, EDUFRN, Natal, 1997). Explicações sucintas podem ser obtidas no livro *Introdução ao Laboratório de Física* de J. Piacentini e colaboradores (ver bibliografia de referência) ou então no *Guia para Física Experimental* da UNICAMP (http://www.dfte.ufrn.br/fis315/erros.pdf)

B) COMO O TEMPO DE ESCOAMENTO DEPENDE DA ALTURA DO RECIPIENTE?

Como mencionamos, nessa atividade estudaremos como o tempo de escoamento da água varia em função da altura e do diâmetro do orifício. Na seção anterior analisamos como o escoamento dependia do diâmetro do orifício do recipiente. Iremos agora tratar a outra parte da questão proposta, isto é, determinar qual a dependência do tempo de escoamento em relação a altura da água no recipiente.

Análise da "constante" $C_1(h)$.

Vimos na seção anterior que a relação entre o tempo de escoamento e o diâmetro envolvia uma constante C_1 que variava com a altura. Escrevemos então que:

$$t = \frac{C_1(h)}{d^2} \quad \textbf{Equação 3}$$

Vamos agora estudar como se dá essa variação.

Na tabela 3, registre os valores da constante C_1 para as respectivas alturas. Deve-se utilizar os valores de C_1 obtidos na linearização, porque que esse procedimento leva em consideração a relação aproximada entre as grandezas t e d. Em seguida, copie a mesma tabela para a sua planilha.

C_1	h(cm)
	30
	10
	4
	1

Tabela 3. Relação algébrica entre C_1 e altura h.

Faça o gráfico (tipo dispersão) de C_1 em função de h (isto é, C_1 *versus* h) na sua planilha. Siga as instruções do apêndice e não se esqueça dos detalhes.

Uma rápida análise do gráfico obtido mostra que a relação não é linear embora C_1 seja crescente com h. Isto sugere várias opções de dependência de C_1 com h, tais como $\sqrt[3]{h}$; $\sqrt{h}$; log(h), etc.

Insira e formate a linha de tendência seguindo os procedimentos do apêndice. Você deve tentar vários tipos de ajuste (polinomial, exponencial, logarítmico, etc.). Compare os valores de R^2 gerados em cada uma delas, e decida qual é melhor.

Você deve ter notado que o melhor ajuste para o gráfico C_1 versus h tem a forma de potência com expoente aproximadamente 0,5. Para determinar a relação matemática C_1 em função de h, você deve fazer a linearização do gráfico, isto é, fazer o gráfico C_1 versus $h^{1/2}$.

A partir do gráfico linearizado, formate a linha de tendência e escreva a função de C_1 (h) que melhor descreve os seus dados no quadro abaixo:

$C_1(h)=$

Equação 4: C_1 obtida pelo gráfico.

C) DETERMINAÇÃO DA EXPRESSÃO "GERAL": O TEMPO (T) DE ESVAZIAMENTO COMO FUNÇÃO SIMULTÂNEA DA ALTURA (H) DA COLUNA DE ÁGUA E DO DIÂMETRO (D) DO ORIFÍCIO.

Note que a equação 4 para C_1 faz parte da **equação 3** determinada anteriormente. Portanto, substituindo a expressão de C_1 na **equação 3** teremos a forma da expressão geral procurada.

Estabeleça a função geral para o tempo de fluxo como uma função simultânea de h e d para este experimento, determinando o valor numérico da nova constante C_2, e preencha o quadro abaixo:

t =

Função geral

Se a expressão obtida no quadro acima é realmente válida para este experimento, ela deve ser capaz de explicar as expressões particulares obtidas na Tabela 2.

P12. Obtenha as equações da Tabela 2 a partir da função geral.

Além de explicar as equações da Tabela 2, a função geral deve também explicar qualquer dado da Tabela 1. Para isto volte à sua planilha onde está a Tabela 1 e ao lado desta desenhe uma outra como mostrada abaixo. A partir da expressão geral determinada acima, calcule os tempos t de esvaziamento preenchendo as células vazias da tabela 4. Os cálculos devem ser feitos através dos recursos de sua planilha eletrônica. Para isso insira a Função Geral na célula correspondente ao tempo para h = 30 cm e d = 1,5 cm. Arraste-a para baixo **(use as dicas apresentadas no apêndice da apostila)**. Complete toda a tabela realizando o mesmo procedimento. Após os cálculos, compare a Tabela 4 com a Tabela 1.

h(cm)---->	30,0	10,0	4,0	1,0
d(cm) ↓		t(s)		
1,5				
2,0				
3,0				
5,0				

Tabela 4. Valores do tempo de esvaziamento t calculados pela fórmula geral.

Voltando ao que foi afirmado na Introdução, estas generalizações devem explicar não só o que foi observado, mas também servem para **fazer previsões** quanto ao que ainda não foi observado. Assim, se a expressão encontrada é realmente geral, ela deve prever situações não incluídas na Tabela 1. Faça algumas previsões do tempo de esvaziamento t para os pares de h e de d sugeridos na Tabela 5.

h (em cm)	d (em cm)	t (em s)
6,0	1,0	
50,0	6,0	
60,0	4,0	

Tabela 5. Previsões para alguns valores de h e de d

Com base no que foi realizado nesta atividade responda:

P13. A expressão obtida é válida para qualquer tamanho de lata? Para qualquer tipo de líquido? Afinal qual é a limitação da função geral encontrada?

P14. Em sua opinião, que grandezas físicas determinam o valor da constante C_2?

P15. A partir do que pôde ser notado, como você avalia a sua hipótese inicial?