Algumas Propriedades

Tabela 5.3: Distribuição de alunos segundo o sexo e escolha de curso.

Curso \ Sexo	Homens (H)	Mulheres (F)	Total
Matemática Pura (*M*)	70	40	110
Matemática Aplicada (*A*)	15	15	30
Estatística (*E*)	10	20	30
Computação (*C*)	20	10	30
Total	115	85	200

Dados os eventos A e H, podemos considerar dois novos eventos:

- $A \cup H$, chamado a *reunião* de A e H, quando pelo menos um dos eventos ocorre;
- $A \cap H$, chamado a *intersecção* de A e H, quando A e H ocorrem simultaneamente.

É fácil ver que $P(A \cap H) = 15/200$.

$$P(A \cup H) = P(A) + P(H) = \frac{30}{200} + \frac{115}{200} = \frac{145}{200}. \quad ?$$

a resposta correta é

$$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) = \frac{30}{200} + \frac{115}{200} - \frac{15}{200} = \frac{130}{200}.$$

Portanto, se U e V são dois eventos quaisquer, teremos a chamada *regra da adição de probabilidades*

$$P(U \cup V) = P(U) + P(V) - P(U \cap V),$$

que se reduz a

$$P(U \cup V) = P(U) + P(V),$$

se U e V são eventos mutuamente exclusivos.

$$A \cap C = \phi \text{ e } P(A \cap C) = 0.$$

operações entre conjuntos

(a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(c) $A \cap \phi = \phi$, $A \cap \Omega = A$

(d) $\phi^c = \Omega$, $\Omega^c = \phi$

(e) $A \cap A^c = \phi$

(f) $A \cup A^c = \Omega$

(g) $A \cup \phi = A$, $A \cup \Omega = \Omega$

(h) $A \cap (B \cup \mathrm{C}) = (A \cap \mathrm{B}) \cup (A \cap C)$

Probabilidade Condicional e Independência

Voltemos à Tabela 5.3 do Exemplo 5.6. Dado que um estudante, escolhido ao acaso, esteja matriculado no curso de Estatística, a probabilidade de que seja mulher é 20/30 = 2/3. Isso porque, do total de 30 alunos que estudam Estatística, 20 são mulheres. Escrevemos

$$P(\text{mulher} \mid \text{Estatística}) = \frac{2}{3}$$

Para dois eventos quaisquer A e B, sendo $P(B) > 0$, definimos a *probabilidade condicional de A dado B* $P(A|B)$, como sendo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

B e A indicam, respectivamente, os eventos "aluno matriculado em Estatística" e "aluno é mulher", então

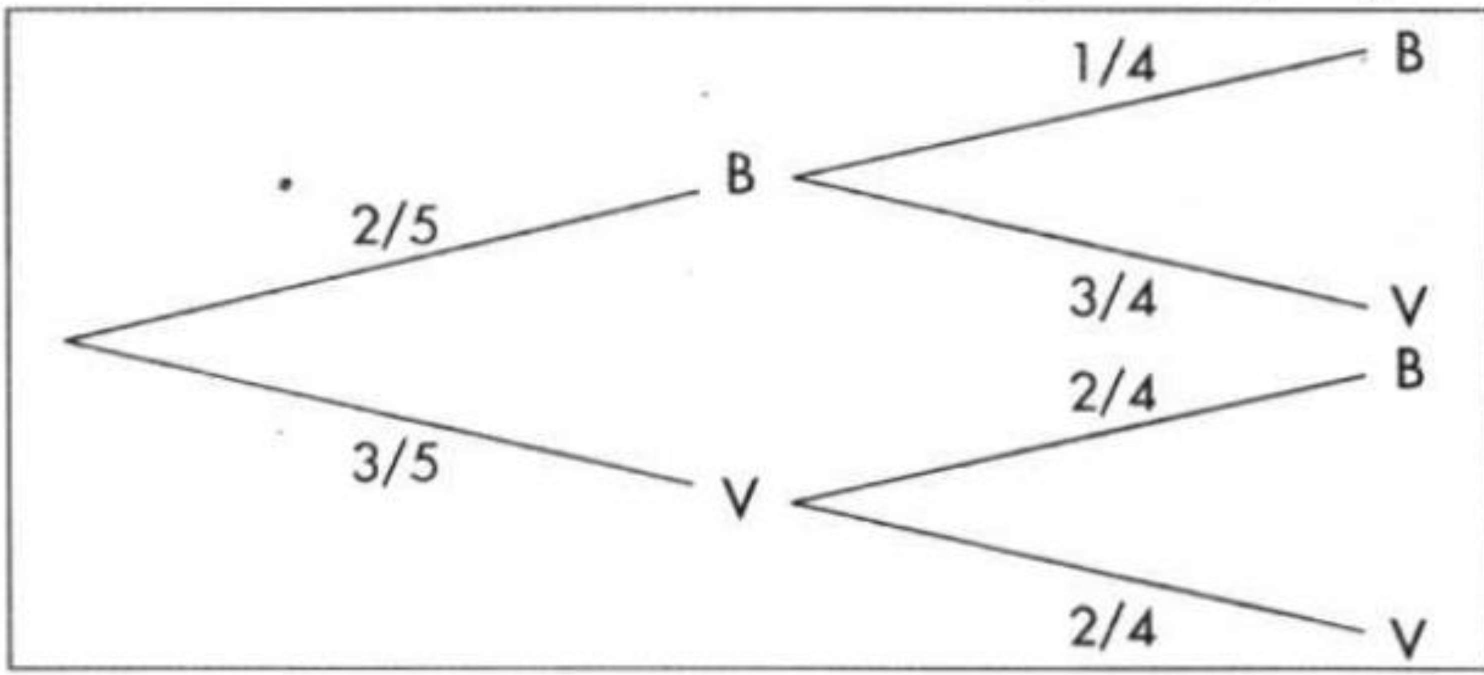
$$P(A|B) = \frac{20/200}{30/200} = \frac{2}{3}$$

obtemos a chamada *regra do produto de probabilidades*,

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A|B).$$

Uma urna contém duas bolas brancas (B) e três vermelhas (V). Suponha que são sorteadas duas bolas ao acaso, *sem reposição*. Isso significa que escolhemos a primeira bola, verificamos sua cor e não a devolvemos à urna; misturamos as bolas restantes e retiramos a segunda. O diagrama em árvore da Figura 5.2 ilustra as possibilidades. Em cada "galho" da árvore estão indicadas as probabilidades de ocorrência, sendo que para as segundas bolas as probabilidades são condicionais. A probabilidade do resultado conjunto é dada, então, por (5.8). Veja a Tabela 5.4.

Figura 5.2: Diagrama em árvore para a extração de duas bolas de uma urna, sem reposição.



Se A indicar o evento "bola branca na segunda extração", então

$$P(A) = P(BB) + P(VB) = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{2}{5}.$$

Tabela 5.4: Resultados e probabilidades para o experimento do Exemplo 5.10.

Resultados	Probabilidades
BB	$2/5 \times 1/4 = 2/20$
BV	$2/5 \times 3/4 = 6/20$
VB	$3/5 \times 2/4 = 6/20$
VV	$3/5 \times 2/4 = 6/20$
Total	1

Imagine, agora, que as duas extrações são feitas da mesma urna do exemplo anterior, mas a primeira bola é *reposta* na urna antes da extração da segunda. Nessas condições, as extrações são independentes, pois o resultado de uma extração não tem influência no resultado da outra. Obtemos a situação da Figura 5.3 e da Tabela 5.5.

Diagrama em árvore para a extração de duas bolas de uma urna, com reposição.

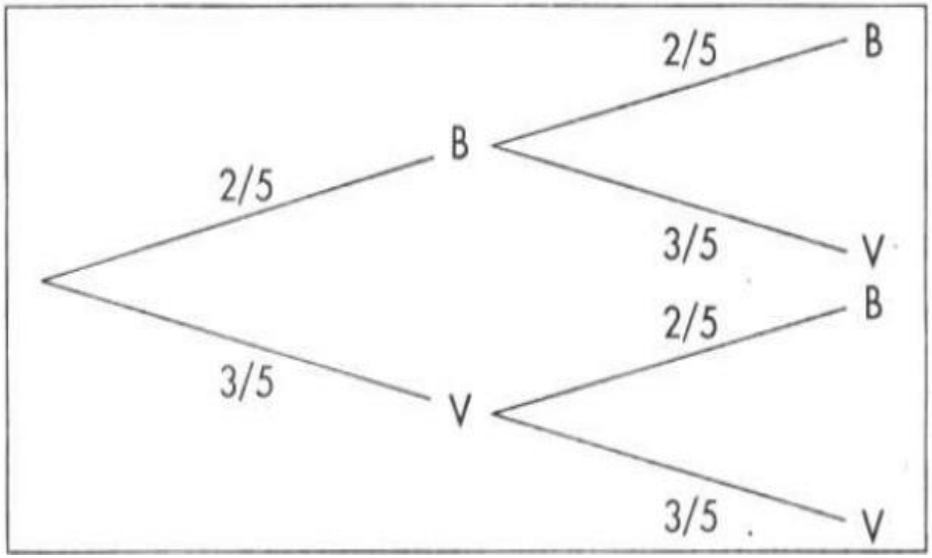


Tabela 5.5: Resultados e probabilidades para o experimento do Exemplo 5.11.

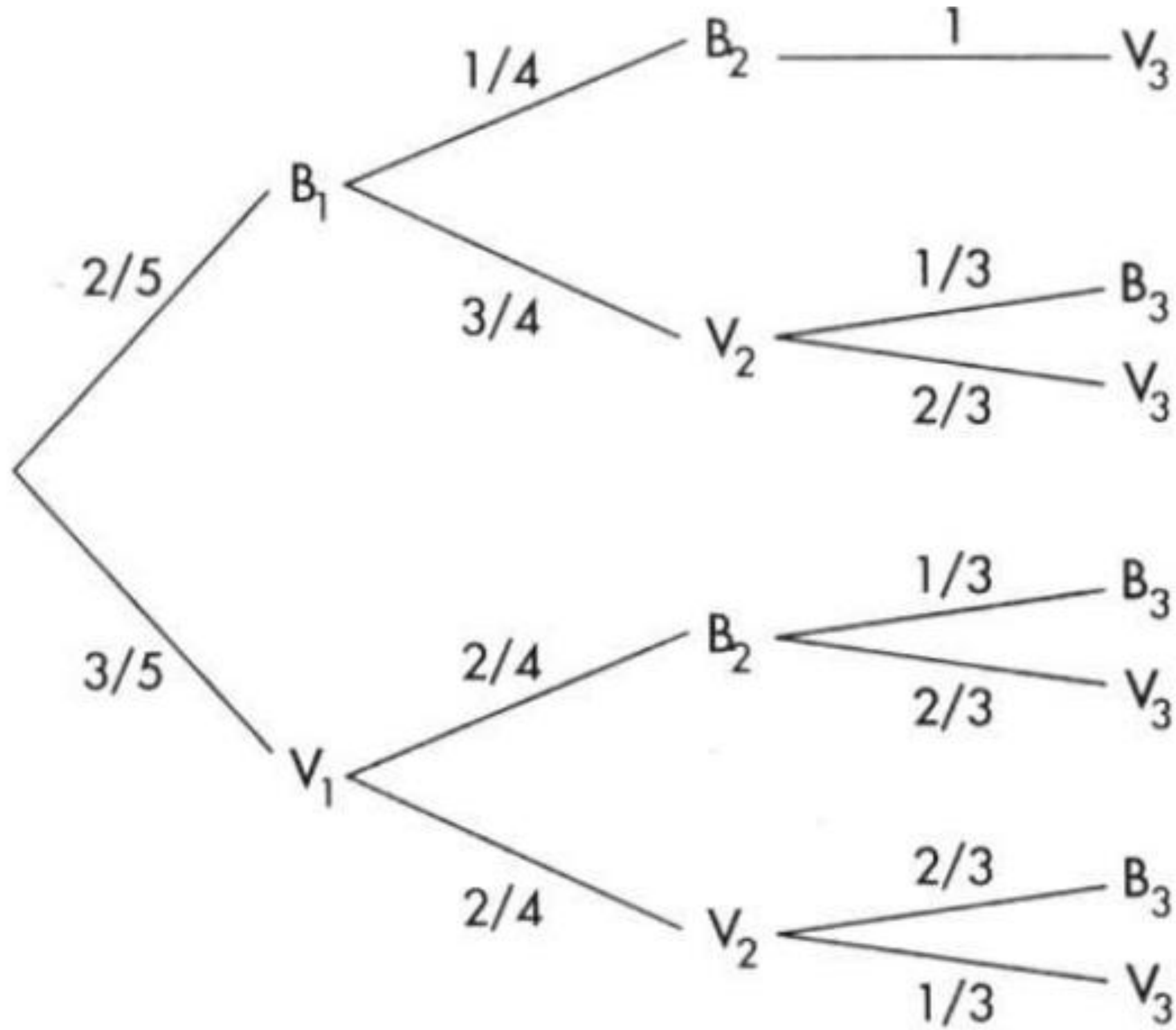
Resultados	Probabilidades
BB	$2/5 \times 2/5 = 4/25$
BV	$2/5 \times 3/5 = 6/25$
VB	$3/5 \times 2/5 = 6/25$
VV	$3/5 \times 3/5 = 9/25$
Total	1

$$P(\text{branca na } 2^{\text{a}} \mid \text{branca na } 1^{\text{a}}) = 2/5 = P(\text{branca na } 2^{\text{a}}),$$

ou seja, se indicarmos por A e B os eventos "bola branca na segunda extração" e "bola branca na primeira extração", respectivamente, então $P(A|B) = P(A)$. Nesse caso, dizemos que o evento A *independe* do evento B e, usando (5.8), temos

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\,P(B).} \qquad (5.9)$$

Diagrama em árvore para a extração de três bolas de uma urna, sem reposição.



$P(B_2 | B_1) = 1/4$, ao passo que $P(V_3 | B_1 \cap B_2) = 1$

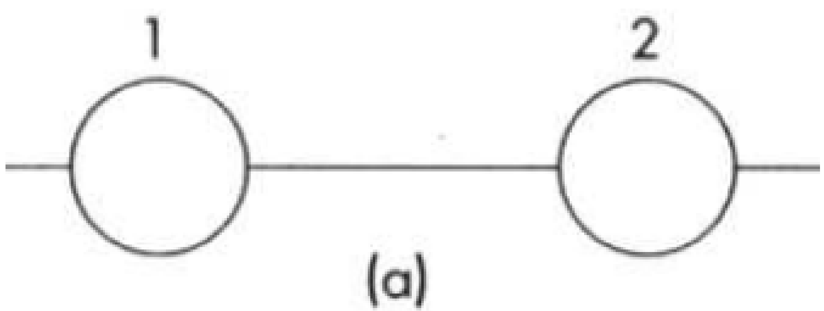
$$P(B_1 \cap B_2 \cap V_3) = P(B_1)\, P(B_2 | B_1)\, P(V_3 | B_1 \cap B_2) = 2/5 \times 1/4 \times 1 = 1/10.$$

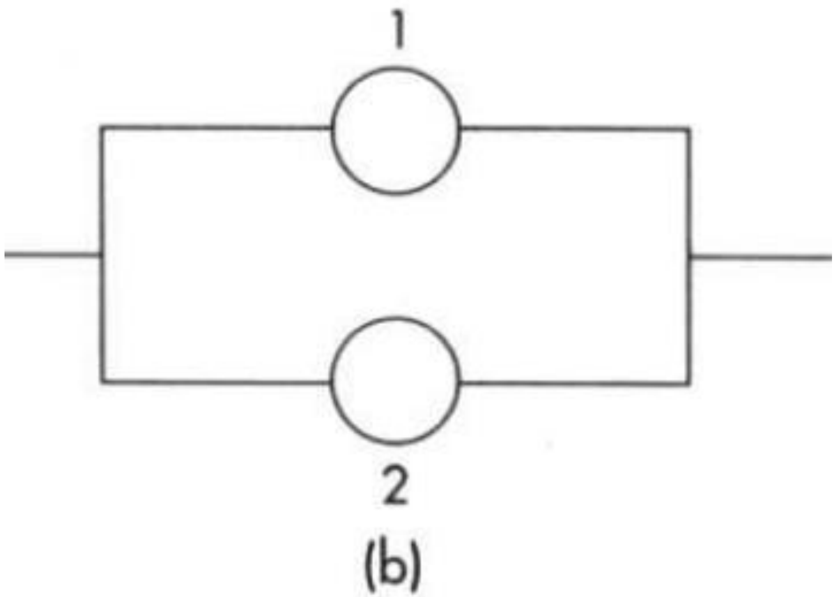
modo geral, dados três eventos A, B e C, temos que

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B | A)\, P(C | A \cap B).$$

A *teoria da confiabilidade* estuda sistemas e seus componentes, como por exemplo sistemas mecânicos e eletrônicos (um automóvel ou um computador) e sistemas biológicos, como o corpo humano. O objetivo da teoria é estudar as relações entre o funcionamento dos componentes e do sistema. A Figura 5.5 (a) ilustra um sistema composto de dois componentes ligados em *série*.

Sistema com dois componentes (a) em série (b) em paralelo.





SÉRIE

$$P(F) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = p_1 p_2,$$

F o evento "o sistema funciona"

p_i é a chamada *confiabilidade do componente i*

$$P(F) = h(p_1, p_2) = p_1 p_2$$

confiabilidade do sistema.

PARALELO

$$P(F) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

confiabilidade do sistema é $h(p_1, p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$.

Vejamos agora o conceito de independência para três eventos:

A, B e C são *independentes* se, e somente se,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)\,P(B), \\ P(A \cap C) &= P(A)\,P(C), \\ P(B \cap C) &= P(B)\,P(C), \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)\,P(B)\,P(C). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Se apenas as três primeiras relações de (5.11) estiverem satisfeitas, dizemos que os eventos A, B e C são *mutuamente independentes*.