EXERCÍCIOS: pg 167

(1) (c) $v = (a,b,c)$, SENDO $b = a + c$

$V \subseteq \mathbb{R}^3$ TAL QUE $V = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b = a + c\}$

POIS BEM, SEJAM

$u, v \in V$ VETORES QQS, DAÍ, $u = (a_1, b_1, c_1)$ E $v = (a_2, b_2, c_2)$.

DEVEMOS MOSTRAR QUE: $u + v \in V$ E $Ku \in V$ p/ $K \in \mathbb{R}$. AGORA,

* $u + v = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$,

$b_1 + b_2 = (a_1 + c_1) + (a_2 + c_2)$ pois $(u, v \in V)$

$= (a_1 + a_2) + (c_1 + c_2)$

$\therefore b_1 + b_2 = (a_1 + a_2) + (c_1 + c_2)$, $(b_1 + b_2) \in V$ (DEF. DE V)

* $Ku = K(a_1, b_1, c_1) = (Ka_1, Kb_1, Kc_1)$, AGORA,

$Kb_1 = K(a_1 + c_1) = Ka_1 + Kc_1$

$\therefore Kb_1 \in V$ (DEF. DE V)

PORTANTO, V É SUBESPAÇO DE $\mathbb{R}^3$

(d) $V = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b = a + c + 1\}$, $V \subset \mathbb{R}^3$

NOTE QUE O TEO. 5.2.1 IMPLICA QUE $\vec{0} \in V$, DAÍ,

$\vec{0} = (0,0,0) \in V \Rightarrow 0 = 0 + 0 + 1$, iE, $0 = 1$ (ABSURDO)

PORTANTO, V NÃO É SUBESPAÇO DO $\mathbb{R}^3$.

(b) $V = \{(a,1,1) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$, $V \subseteq \mathbb{R}^3$

(EXPLICAÇÃO ANÁLOGA AO ITEM (d))

V NÃO É SUBESPAÇO DO $\mathbb{R}^3$

2

(c) $M_{\cancel{2\times2}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ E } \det(A) = 0 \right\}$

SEJA $u, v \in M_{\cancel{2\times2}}$ COM $u = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ E $v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. LOGO,

$u + v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, MAS, $\det(u+v) = 2 - 3 = -1 \neq 0$

LOGO, $(u+v) \notin M_{\cancel{2\times2}}$, iE, $\cancel{M_{2\times2}}$ M Ñ É SUBESPAÇO DE $M_{2\times2}$.

(b) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ E } a+b+c+d=0 \right\}$

POIS BEM, SEJAM $\vec{u}, \vec{v}$ VETORES QQS DE M, DEVEMOS MOSTRAR QUE $(\vec{u}+\vec{v}) \in M$ E $\alpha \vec{u} \in M$ P/ QQ. $\alpha \in \mathbb{R}$. DE FATO,

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \quad \text{c/} \quad a+b+c+d=0 \text{ E } e+f+g+h=0, \text{ ENTÃO}$$

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}, \quad \text{DAÍ,} \quad (a+e)+(b+f)+(c+g)+(d+h) = $$
$$= (a+b+c+d)+(e+f+g+h) = 0+0 = 0.$$

LOGO, $(\vec{u}+\vec{v}) \in M$.

$$\alpha \vec{u} = \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} \quad \text{E} \quad \alpha a + \alpha b + \alpha c + \alpha d = \alpha(a+b+c+d) =$$
$$= \alpha \cdot 0 = 0.$$

ASSIM, $\alpha \vec{u} \in M$. PORTANTO, M É SUBESPAÇO VETORIAL DE $M_{2\times2}$.