Espaços Vetoriais

2.1 Definição. Um *corpo* é um conjunto K, munido de duas operações,

uma chamada adição que, a cada par de elementos $a, b \in K$, associa um elemento $a + b \in K$,

e outra chamada multiplicação, que a cada par de elementos $a, b \in K$, associa um elemento $a \cdot b \in K$

satisfazendo as seguintes condições:

K_1: $a + b = b + a, \forall\ a, b \in K$ (comutatividade da adição);

K_2: $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall\ a, b, c \in K$ (associatividade da adição);

K_3: existe um elemento $0 \in K$ tal que $a + 0 = a, \forall\ a \in K$

K_4: para cada $a \in K$ existe um elemento $-a \in K$ tal que $a + (-a) = 0$

K_5: $ab = ba, \forall\ a, b \in K$ (comutatividade da multiplicação);

K_6: $a(bc) = (ab)c, \forall\ a, b \in K$ (associatividade da multiplicação);

K_7: existe um elemento $1 \in K$ tal que $1 \cdot a = a, \forall\ \in K$

K_8: para cada $a \in K, a \neq 0$, existe $a^{-1} \in K$, também denotado por $\frac{1}{a}$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$

K_9: $a(b + c) = ab + ac, \forall\ a, b, c \in K$

2.2 Definição.

Dizemos que um conjunto $V \neq \emptyset$, é um espaço vetorial sobre um corpo K se, e somente se,

I - Existe uma operação de adição $(u, v) \mapsto u + v$ em V, que verifica os seguintes axiomas:

A_1: $u + v = v + u, \forall\ u, v \in V$(comutativa);

A_2: $(u + v) + w = u + (v + w), \forall\ u, v, w \in V$ (associativa);

A_3: Existe em V um elemento neutro para essa adição o qual será simbolizado,

por 0. Ou seja: $\exists\ 0 \in V; u + 0 = u, \forall\ u \in V;$

A_4: Para todo elemento u de V existe o oposto que é indicado por $(-u)$. Assim:

$$\forall\ u \in V, \exists(-u) \in V; u + (-u) = 0;$$

II - Está definida uma multiplicação de $K \times V$ em V,

o que significa que a cada para (α, u) de $K \times V$

está associado um único elemento de V, que se indica

por αu, e, para essa operação, os seguintes

axiomas são verificados:

M_1: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \forall\ u \in V$ e $\forall\ \alpha, \beta \in K$;

M_2: $(\alpha + \beta)u = \alpha u \beta u, \forall\ u \in V$ e $\forall\ \alpha, \beta \in K$;

M_3: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall\ u, v \in V$ e $\forall\ \alpha \in K$;

M_4: $1u = u, \forall\ \in V$.

Vejamos alguns exemplos de espaços vetoriais.

Exemplo **2.1.** Os espaços vetoriais euclidianos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$.

Exemplo **2.3.** O conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

O vetor $u = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e o vetor $v = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ com a notação matricial (matriz-coluna $n \times 1$),

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

$u + v$ e αu na notação matricial

Subespaços Vetoriais

2.6 Teorema. Seja V um espaço vetorial sobre $K = \mathbb{R}$. Um subespaço vetorial de V é um subconjunto $W \subset V$, tal que:

i. $W \neq \emptyset$, ou $0 \in W$(vetor nulo);

ii. $\forall\ u, v \in W, u + v \in W$;

iii. $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, e $\forall\ u \in W, \alpha u \in W$.

Vejamos alguns exemplos de subespaços vetoriais.

Exemplo **2.4.** $V = \mathbb{R}^3$ e $W \subset V$, um plano passando pela origem.

***Exemplo* 2.6.** $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

***Exemplo* 2.7.** A intersecção de dois subespaços vetoriais do mesmo espaço V é também um subespaço vetorial de V.

***Exemplo* 2.8.** $V = \mathbb{R}^3$. $U \cap W$ é a reta de interseção dos planos U e W.

2.4.1 Soma de Subespaços

Os espaços U e W são retas que passam pela origem.
Então, $U \cap W = \{0\}$ e $U \cup W$ é o "feixe"
formado pelas duas retas, que não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Assim, $U \cup W$ não é subespaço de V.

2.7 Definição.

Indicaremos por $U + W$ e chamaremos de soma de U com W

$$U + W = \{u + w | u \in U \text{ e } w \in W\}.$$

Observe que $U + W = W + U$ e $U + \{0\} = U$, para todos os subespaços U e W de V. Assim como é verdade que $U \subset U + W$ e $W \subset U + W$.

2.8 Proposição. *Se U e W são subespaços vetoriais de V então $U + W$ também é subespaço vetorial de W.*

Combinações Lineares e Subespaço Gerado

2.11 Definição. Sejam V um espaço vetorial real $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais

Então, o vetor $a_1 v_1, a_2 v_2, \ldots, a_n v_n$ é um elemento de V ao que chamamos combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

$\boxed{\text{combinação linear envolve apenas um número finito de vetores!}}$

$$W = [v_1, v_2, \ldots, v_n].$$

$$\{v \in V; v = a_1 v_1 + a_2 v_2, \ldots, a_n v_n, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

W é chamado **subespaço gerado** por $v_1, v_2, \ldots, v_n$

***Exemplo* 2.13.** $V = \mathbb{R}^3, v \in V, v \neq 0.$

Então $[v] = \{av : a \in \mathbb{R}\}$ é a reta que contém o vetor v

***Exemplo* 2.14.** Se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ são tais que $\alpha v_1 \neq v_2$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, então $[v_1, v_2]$ será o plano que passa pela origem e contém v_1 e v_2.

$\boxed{\text{Observe que se } v_3 \in [v_1, v_2], \text{ então } [v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2].}$

***Exemplo* 2.15.**

Os vetores $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Bases e Dimensão

Em outras palavras, queremos determinar um conjunto de vetores que gere *V* e tal que todos os elementos sejam realmente necessários para gerar *V*.

tarefa de atribuir uma dimensão a certos espaços vetoriais.

2.5.1 Dependência Linear e Independência Linear

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

2.14 Definição.

Dizemos que um conjunto $L = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$ é linearmente independente (L.I.) se, e somente se, uma igualdade do tipo

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$$

com os α_i em $\mathbb{R}$, só for possível para $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

***Exemplo* 2.19.** Sejam $v_1, v_2, v_3 \in V = \mathbb{R}^3$.

O conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é L.D. se os três vetores estiverem no mesmo plano, que passa pela origem.

***Exemplo* 2.20.** Considere o espaço $V = \mathbb{R}^2$ e os vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$. O conjunto $\{e_1, e_2\}$ é L.I., pois,

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$$
$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0)$$
$$(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$$
$$\alpha_1 = 0 \text{ e } \alpha_2 = 0.$$

2.5.2 Propriedades da Dependência Linear

Se um conjunto finito $L \subset V$ contém o vetor nulo, então esse conjunto é L.D.

Se $S = \{u\} \subset V$ e $u \neq 0$, então S é L.I.

Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ é L.D., então um dos seus vetores é combinação linear dos outros.

Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não vazios de V, se $S_1 \subset S_2$ e S_1 é L.D., então S_2 também é L.D.

Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não vazios de V, se $S_1 \subset S_2$ e S_1 é L.I., então S_2 também é L.I.

Se $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é L.I., e para um certo $u \in V$ tivermos $S \cup \{u\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, u\}$ L.D., então o vetor u é combinação linear dos vetores $u_1, u_2, \ldots, u_n$,

Se $S = \{u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_n\}$ e $u_j = \alpha u_1 + \ldots + \alpha u_n$ então

$$[S] = [S - \{u_j\}].$$

Base de um Espaço Vetorial Finitamente Gerado

2.15 Definição.

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado.

Uma base de V é um subconjunto finito

$W \subset V$ para o qual as seguintes condições se verificam:

i. $[W] = V$;

ii. W é linearmente independente.

***Exemplo* 2.24.** $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$.

***Exemplo* 2.25.** $\{(2,0),(3,0)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$, pois é um conjunto L.D.

***Exemplo* 2.26.** $\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^n$.

***Exemplo* 2.27.** $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ não é base de $\mathbb{R}^3$. É L.I., mas não gera todo $\mathbb{R}^3$

***Exemplo* 2.28.** Os $n+1$ polinômios $1, t, \ldots, t^n$ formam uma base de $P_n(\mathbb{R})$.

***Exemplo* 2.29.** $\{(1,2,0),(0,1,-1),(2,0,1),(0,-4,1)\}$ não é uma base do $\mathbb{R}^3$

As base dos exemplos 2.24, 2.26, 2.28 acima mencionados são chamadas bases canônicas dos espaços $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $P_n(\mathbb{R})$

2.16 Proposição.

Todo espaço vetorial finitamente gerado admite uma base.

Dimensão

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado.
Denomina-se *dimensão* de V (notação: $\dim(V)$)
o número de vetores de uma qualquer de suas bases

$\boxed{V \text{ é um } \textit{espaço vetorial de dimensão finita}.}$

Podemos constatar, portanto, que:

1. $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$;
2. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$;
3. $\dim(M_{m\times n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$;
4. $\dim(P_n(\mathbb{R}) = n + 1$;
5. $\dim(\{0\}) = 0$.

2.18 *Teorema.*

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita.

Então todas as bases de V tem o mesmo número de elementos.

2.23 *Teorema.*

Se U e W são subespaços de um mesmo espaço vetorial V que possui dimensão finita, então

$$\dim(U) \leq \dim(V) \text{ e } \dim(W) \leq \dim(V).$$

Além disso:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$