Tabela Verdade, Tautologia, Contradição e Contingência

Uma fórmula A é chamada de <u>CONTRADIÇÃO</u> se para qualquer valor de verdade de seus atomos a fórmula sempre assume valor F (Falso) .

Uma fórmula P é chamada de <u>TAUTOLOGIA</u> se para qualquer valor de verdade de seus átomos a fórmula sempre assume valor V (Verdadeiro).

Uma fórmula Q é chamada de <u>CONTINGÊNCIA</u> se para algum valor de verdade de seus átomos a fórmula assume valor V (Verdadeiro) e para algum valor de verdade de seus átomos a fórmula assume valor de verdade F (Falso)

Se uma fórmula A é <u>TAUTOLOGIA</u> então ~A é CONTRADIÇÃO.

Se A é CONTRADIÇÃO então ~A é TAUTOLOGIA.

Por serem sempre verdadeiras – logicamente verdadeiras – as tautologias são aquelas fórmulas a que se costuma dar o nome de LEIS LÓGICAS

A fórmula $p \vee \neg p$ é uma tautologia. (Terceiro Excluído)

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

A fórmula $p \wedge \neg p$ é uma contradição.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Comutativa	$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$	$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
Associativa	$((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$	$((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$
Idempotente	$(p \wedge p) \leftrightarrow p$	$(p \vee p) \leftrightarrow p$
Propriedades de V	$(p \wedge V) \leftrightarrow p$	$(p \vee V) \leftrightarrow V$
Propriedades de F	$(p \wedge F) \leftrightarrow F$	$(p \vee F) \leftrightarrow p$
Absorção	$(p \wedge (p \vee r)) \leftrightarrow p$	$(p \vee (p \wedge r)) \leftrightarrow p$
Distributivas	$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$	$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
Distributivas	$(p \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$	$(p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$
Leis de De Morgan	$\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$	$\sim (p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
Def. implicação	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$
Def. bicondicional	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p))$
Negação	$\sim (\sim p) \leftrightarrow p$	
Contraposição	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$	
Exportação($\Rightarrow$)	*Importação ($\Leftarrow$)*	$((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
Troca de Premissas	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$	

Modus ponens	$(p \land (p \to q)) \to q$
Modus tollens	$((\sim p \land (q \to p)) \to \sim q$
Silogismo disjuntivo	$((p \lor q) \land \sim p) \to q$
Silogismo hipotético	$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$
Lei de Peirce	$((p \to q) \to p) \to p$
Lei de Duns Scot	$\sim p \to (p \to q)$
Prefixação	$p \to (q \to p)$
Antilogismo	$((q \land r) \to p) \leftrightarrow ((q \land \sim p) \to \sim r)$

Equivalência de Fórmulas e as Tabelas Verdade

_Uma fórmula P é logicamente equivalente a uma fórmula Q se, e somente se, $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia.

Notação: $P \Leftrightarrow Q$ ou $P \equiv Q$.

Exemplo: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
V	V	**V**	F	F	**V**	**V**
V	F	**F**	F	V	**F**	**V**
F	V	**V**	V	F	**V**	**V**
F	F	**V**	V	V	**V**	**V**

Propriedades da equivalência lógica

Propriedade Reflexiva: $A \Leftrightarrow A$.

Propriedade Simétrica: Se $A \Leftrightarrow B$ então $B \Leftrightarrow A$.

Propriedade Transitiva: Se $A \Leftrightarrow B$ e $B \Leftrightarrow C$ então $A \Leftrightarrow C$.

Se A e B são ambas tautologias ou contradições então $A \Leftrightarrow B$.

Uma fórmula proposicional A implica logicamente uma fórmula proposicional B see $A \rightarrow B$ é uma tautologia. Denotamos isto por $A \Rightarrow B$.

Propriedades da implicação lógica

Propriedade Reflexiva: $A \Rightarrow A$.

Propriedade Antissimétrica: Se $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$ então $A \Leftrightarrow B$.

Propriedade Transitiva: Se $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow C$ então $A \Rightarrow C$.

Proposições associadas a uma condicional ($\rightarrow$)

Dada a condicional $A \rightarrow B$, as seguintes fórmulas proposicionais são associadas a ela:

(i) Recíproca $B \rightarrow A$.
(ii) Contrária $\sim A \rightarrow \sim B$
(iii) Recíproca da contrária ou Contrapositiva $\sim B \rightarrow \sim A$

Algumas equivalências lógicas importantes

Sejam P e Q fórmulas proposicionais quaisquer. Então, são logicamente equivalentes às seguintes fórmulas proposicionais:

$$P \wedge Q \quad \text{e} \quad \sim(\sim P \vee \sim Q)$$

$$P \vee Q \quad \text{e} \quad \sim(\sim P \wedge \sim Q)$$

$$P \rightarrow Q \quad \text{e} \quad \sim P \vee Q$$

Dem.:

Basta mostrarmos que $(P \wedge Q) \leftrightarrow \sim(\sim P \vee \sim Q)$, $(P \vee Q) \leftrightarrow \sim(\sim P \wedge \sim Q)$ e $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$ são tautologias.